ZEITSCHRIFT

FÜR

PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.

Der hydraulische Balancier in seinem Princip;

dargestellt von

Dr. *Lackerbauer.*

(Beschlufs.)

26. Ist die Maschine diesem gemäfs eingerichtet, so wird der relative Wasserstofs gegen die mit der Geschwindigkeit c ausweichende Schaufel oder die bewegende Kraft

$$\Pi = \frac{\varkappa B \rho C^2}{9\sigma} = \frac{4}{9} P.$$

Und wenn vermöge der Bauart $\varkappa$ als Mittel zwischen ihrem Minimum 1 und Maximum 2, also $\varkappa = \frac{3}{2}$ angenommen werden kann; so ergibt sich auch wegen $\frac{C^2}{\sigma} = 4h$ die bewegende Kraft $\Pi = \frac{2}{3} B h \rho$. Diesen Werth von Π in die schon vorhin gefundenen Gleichungen statt des dortigen Π substituirt, verbindet die Data mit einander, wie die Maschine am vortheilhaftesten construirt wird, auch werden dadurch die Theile der Maschine, da $h = \frac{C^2}{4\sigma}$ und $B = \frac{V}{C}$ ist, mit der Menge Wasser, welche der Canal in einer Secunde schüttet, in Verbindung gebracht.

Übrigens ist die Umlaufzeit des Wasserrades $\mathfrak{T} = \frac{2R\pi}{c}$, die Geschwindigkeit des von Π angegriffenen

Punctes $c = \frac{2 R \pi}{\mathfrak{T}}$, die Anzahl der Umläufe des Rades in einer Minute $N = \frac{60''}{\mathfrak{T}} = \frac{30\, c}{R \pi}$, und die Geschwindigkeit des leidenden Punctes $= (\frac{1}{2} l \cos. \varphi + \frac{1}{2} \beta) \frac{e \pi}{45\, \mathfrak{T}}$.

27. Während der leidende Punct mit der Geschwindigkeit $(\frac{1}{2} l \cos. \varphi + \frac{1}{2} \beta) \frac{e \pi}{45\, T}$ seinen Bogen $(\frac{1}{2} l \cos. \varphi + \frac{1}{2} \beta) \frac{e \pi}{90}$ durchwandert, strömet die Last Wasser $\frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{Q} \rho$ in der Zeit $T = \frac{\mathfrak{Q}}{0{,}64 . O V}$ von einer Reihe der Säcke in die entgegengesetzte über, und der Widerstand wandert so von seinem Maximum, wo er gleich $\frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{Q} \rho$ mehr der gesammten Reibung $= \mathfrak{R}$ mehr y ist, durch sein Minimum über, in welchem er für *Einen* Moment nur mehr $= \mathfrak{R} + y$ ist. In diesem Zeitmomente, in welchem während der Oscillation des Körpers in *K* die Last $\frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{Q} \rho$ zu gleichen Theilen auf beiden Seiten der Lothlinie der Maschine vertheilet ist, verschwindet aus allen vorhin aufgestellten Gleichungen der Theil $\frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{Q} \rho (\frac{1}{2} l \cos. \varphi + \frac{1}{2} \beta)$ als gleich Null von der Seite des Widerstandes, und es verbleiben auf derselben, gesetzt in der Gleichung Nro. 23, nur mehr die zwei übrigen Theilmomente $\frac{1}{2} \delta f' D + \frac{1}{2} d F' r \sin. 2$, worüber nun das entgegengesetzte Kraftmoment $\Pi R D$ eine merkliche Überwucht äufsern würde.

Sobald aber der Widerstand aus dem Puncte (Zeittheilchen) dieses Minimums tritt, nimmt er stettig wieder zu, bis er sein Maximum erreicht hat; nimmt von da wieder ab, und dann wieder zu, u. s. w., so dafs der Widerstand während einer Kurbelumdrehung zwei Mal sein Maximum und zwei Mal sein Minimum durchwandert, und die Curve des Widerstandes als eine in sich zurückkehrende Linie anzunehmen ist, welche

ihre Axe, die Zeitdauer einer Schwingung in den Puncten des Minimum des Widerstandes, schneidet, und deren Semiordinaten den Widerstand angeben, welcher den relativen Abscissen entspricht. Das Maximum des Widerstandes gibt die durch den Mittelpunct der Hauptaxe gehende halbe Queraxe, an die sich die rechts und links derselben zunächst stehenden Semiordinaten reihen. Das Minimum liegt an beiden Enden der Axe in den Durchschnitten mit der Curve, das Medium in den Semiordinaten zwischen beiden. Durch dieses Medium und Minimum des Widerstandes dauert der Ausfluſs des Wassers aus den Leitungsröhren durch jene Zeit $T = \frac{\Omega}{0{,}64 \cdot V O}$, welche in der Beschreibung des Elongationswinkels die durch die Drehungsaxe C gehende Querlinie verwendet, um einen Winkel abwärts, der gleich $x + H$, und einen Winkel zurück aufwärts, der gleich H ist, zu beschreiben, also durch einen Bogen, der gleich $\frac{2H + x}{180} (\frac{1}{2} l \cos. \varphi + \frac{1}{2} \beta) \pi$ ist.

28. Während in dieser Bewegung die Hauptlast $\frac{1}{2} \mathfrak{M} \Omega \rho$, wenn man $\mathfrak{R}$ und y bei Seite setzet, für die bewegende Kraft stufenweise bis auf Null ab-, und dann wieder zunimmt, theilet sich dieselbe in ihrer Ab- und Zunahme in zwei Theile, von denen der erste von der Unterlage der Drehungsaxe in C getragen wird, während der andere am Ende des Hebelarmes $(\frac{1}{2} l \cos. \varphi + \frac{1}{2} \beta)$ als Last verbleibt. Beide Theile stehen jedoch mit dem Sinus und Cosinus des Winkels, den die Centrallinie CD in ihrer Schwungbewegung beschreibt, im Verhältnisse, so zwar, daſs immer der Theil $\frac{1}{2} \mathfrak{M} \Omega \rho \sin. e$ von dem Unterstützungspuncte getragen, der andere Theil $\frac{1}{2} \mathfrak{M} \Omega \rho \cos. e$ aber von der Kraft zu überwuchten bleibt. Übrigens ist das Moment $\frac{1}{2} \mathfrak{M} \Omega \rho (\frac{1}{2} l \cos. \varphi + \frac{1}{2} \beta)$ ein

Minimum, sobald $\cos. e = \sqrt{1 - \sin.^2 (\varphi - x)}$, ein Maximum hingegen, wenn $\cos. e = 1$ ist.

Demnach sind, mit Verzicht auf y, für das Medium des Widerstandes die Gleichungen:

$$\Pi' R D = \tfrac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{Q} \rho \cos. e \left(\tfrac{1}{2} l \cos. \varphi + \tfrac{1}{2} \beta\right) r \sin. \vartheta + \tfrac{1}{2} \delta f' D + \tfrac{1}{2} d F' r \sin. \vartheta,$$

$$\Pi' = \frac{\tfrac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{Q} \rho \cos. e \left(\tfrac{1}{2} l \cos. \varphi + \tfrac{1}{2} \beta\right) r \sin. \vartheta + \tfrac{1}{2} \delta f' D + \tfrac{1}{2} d F'}{R D},$$

in welchen zwar die Reibungen f' und F' von jenen in Nro. 21 und 23 bestimmten in etwas divergiren, aber da einerseits bei geringerer Last auch geringere Kräfte mit in die Bestimmung der Reibung verflochten werden, andererseits aber für eben dieselbe der Theil der Last $\tfrac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{Q} \rho \sin. e$ zu den Gewichten der bewegten Theile M und m zu addiren ist, so kann man die daraus resultirende Reibung so ziemlich gleich der erstern setzen, und also $f' = f$ und $F' = F$ annehmen.

29. Würde man nach dieser Voraussetzung Π nach der obigen Gleichung des Mediums berechnen, so würde es offenbar zu klein ausfallen, sobald $\cos. e$ kleiner als 1 genommen würde; die Hebmaschine würde bei einer Schwingung nicht die ganze geforderte Wassermenge $\mathfrak{Q}$, sondern nur $\mathfrak{Q} \cos. e$ in die Höhe A fördern können; dafür gibt aber auch diese letzte Gleichung zu erkennen, daſs im Vergleich mit der Gleichung Nro. 24 für das Maximum des Widerstandes die Überwucht, welche aus dem Unterschiede der beiden Kräfte $\Pi - \Pi'$ hervorgehet, nämlich

$$\frac{(r \sin. \vartheta)(1 - \cos. e)\left(\tfrac{1}{2} l \cos. \varphi + \tfrac{1}{2} \beta\right) \tfrac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{Q} \rho}{R D} = p',$$

die disponible Kraft sey, welche die Hindernisse y überwuchte. Daſs sie es seyn müsse, darf der Theoretiker,

nachdem nun andererseits schon aller Widerstand und alle Reibung der Maschine durch die respectiven Kräfte gehoben sind, nur bemerken, dafs die noch übrige veränderliche Kraft p', wenn man alle übrigen Nebenhindernisse aufser der Reibung gleich Null ansehen wollte, frei und ohne Widerstand zu finden, auf den Stofspunct des unterschlächtigen Rades wirken würde, dafs folglich dieses p', welches zwar in dem Maximum des Widerstandes der Maschine $= 0$, von da an aber im Verhältnisse von $(1 - \cos. e) = \sin. \text{vers.}\, e$ zunimmt, in ihrem Medio

$$= \frac{r \sin. z\, (1 - \cos. e)\, (\frac{1}{2} l \cos. \varphi + \frac{1}{2}\beta)\, \frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{Q} \rho}{RD}$$

ist, und in ihrem Maximo, welches in dem Minimo des Widerstandes eintrifft, für ein Zeittheilchen bis auf

$$\frac{\frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{Q} \rho\, (\frac{1}{2} l \cos. \varphi + \frac{1}{2}\beta)\, r \sin. z}{RD}$$

anwächst, eine Kraft sey, welche in dem unterschlächtigen Rade ein nicht unbedeutendes Drehungsmoment produciren, und dessen Geschwindigkeit stettig vermehren würde (wenn sie selbst auch während jeder halben Kurbelumdrehung von ihrem Maximo wieder bis auf o abnimmt), wenn man von allen Nebenhindernissen y abstrahiren wollte.

30. Um sich dessen zu überzeugen, darf man nur das Drehungsmoment des unterschlächtigen Rades, das gleich der Summe der Producte aus den Elementartheilchen, aus denen das Rad bestehet, multiplicirt mit den Quadraten ihrer Abstände von der Drehungsaxe $= mY^2$ ist, bestimmen, und darnach die Resultate entwickeln, welche sich für die Umdrehungsbeschleunigung $= \frac{\sigma p' R'}{m Y^2}$, und nach den Fundamentalgleichungen

$$dS' = c'\,dT',$$

$$dc' = \frac{2\,\sigma\,p'\,R'\,d\,T'}{m\,Y^2},$$

$$c'\,d\,c' = \frac{2\,\sigma\,p'\,R'\,d\,S'}{m\,Y^2},$$

$$d\,(d\,S) = \frac{2\,\sigma\,p\,R'\,d\,T'^2}{m\,Y^2}$$

ergeben.

Diese Resultate fallen zwar bei der verschiedenen Vertheilung der Massen und der Zwischenräume, und den verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten, die sich aus der Veränderung oder abwechselnden Zu- und Abnahme des p' ergeben, so verwickelt aus, daſs sie von keinem practischen Nutzen mehr sind. Indessen geben sie doch zu erkennen, daſs zur Erzweckung einer durchaus ganz gleichförmigen Geschwindigkeit des angegriffenen Punctes (wenn eben diese, da sie nicht wesentlich ist, verlangt würde) mit der Maschine ein Regulator in Verbindung gebracht werden müſste, welcher, wenn die Maschine zu geschwinde gehet, den Widerstand vermehrt oder das Schutzbret niedergehen macht, bei zu langsamer Bewegung aber das Schutzbret in die Höhe hebt, oder den vermehrten Widerstand aufhebt, wodurch denn auch den zufälligen Hindernissen der gleichförmigen Bewegung, als da sind: Einfluſs der Witterung auf die Materie, plötzliche Anschwellung des Aufschlagwassers, zufällige mehr oder wenige Aufnahme des Hubwassers, gesteuert wird, und die Hebmaschine in ihrer einmal Nro. 25 erlangten Geschwindigkeit regulirt im Gleichgewichte mit $\frac{1}{2}\mathfrak{M}\mathfrak{Q}\rho + \mathfrak{R} + y$ durchaus sich gleichförmig fortbewegt.

Bei einer Hebmaschine aber, die nur für eine Bewässerungsanstalt construirt wird, halte ich dafür, daſs die Herstellung einer so sich durchaus ganz gleichförmigen Bewegung mit unnöthigen Kosten verbunden ist,

und daſs die in Nro. 25 resultirende, wo die gleichzeitigen Geschwindigkeiten während einer Kurbelumdrehung immer jenen während einer anderen Umdrehung der Kurbel völlig gleich sind, wohl genügend und ohne Nachtheil sey. — Sollte jedoch bei dieser Maschine eine ganz gleichförmig geregelte Bewegung anderer Entzwecke willig erfordert werden, so befinden sich in *Nicholson's* practischem Mechaniker und Manufacturisten einige solcher Regulatoren, die mit geringer Abänderung auch dieser Maschine so angepaſst werden können, daſs der angegriffene Punct auch während *einer* Umdrehung des Rades in gleichen auf einander folgenden Zeittheilchen auch ganz gleiche Räume durchlaufe.

31. Man kann diese Maschine auch auf eine andere Weise, die sich von der vorhergehenden dadurch unterscheidet, daſs sie auf dem Wasser schwimmt, und der Elongationswinkel, statt durch Schwingung, durch Verschiebung beschrieben wird, einrichten.

Die Leitungsröhren, welche die Behälter mit einander verbinden, sind krumm, und verhältniſsmäſsig weiter und höher, damit das Wasser, so wie es aus den Röhren in die Behälter überströmet, sogleich wieder aus diesen zum Theil bis in die Mitte der andern Leitungsröhren gegen die Centrallinie vordringen kann. Das Hypomochlium ist bis auf eine gewisse Weite in jedem Sinne beweglich, und es sind der Maschine wasserdichte lange Kesseln, die in einer bemessenen Entfernung von der Centrallinie angebracht sind, beigegeben, deren Bestimmung ist, durch ihre Versenkung ins Wasser, während der Gefällswinkel beschrieben wird, mittelst Ausdrängung einer verhältniſsmäſsigen Menge Wassers der zunehmenden Überwucht des abwechselnd in den Behältern angehäuften Wassers, und dem Aufschwunge der Versenkung das Gleichgewicht zu halten. Sie kön-

nen nach Erforderniſs auch höher und tiefer gestellt werden, um das Eintreten dieses Zeitpunctes auf früher oder später reguliren zu können.

Die Versenkung kann selbst von ihrem Innern heraus, um das in dieselbe allenfalls gesinterte Wasser hinweg zu schaffen, mit einer kleinen darin befestigten Röhrenleitung versehen werden, welche, ohne ihr eine abgesonderte Oscillation zu ertheilen, ihre Dienste thun wird, da ohnedieſs durch die Verschiebungen der ganzen Maschine die Röhren und Behälter derselben abwechselnd in die vorgeschriebene geneigte Lage versetzt werden. Ihre Ausguſsmündung befindet sich innerhalb der Hebmaschine, und damit auch von auſsen kein Wasser durch die Ansguſsmündung in dasselbe dringen kann, über die Versenkung erhoben.

Um bei der getroffenen Vorrichtung das Wasser auf diese zweite Art in die Höhe zu fördern, darf nur Nro. 5 die schwimmende Versenkung abwechselnd von *W* gegen *S*, und von *S* gegen *W* zurückgeführt werden, welches ich auf stillstehendem Wasser ohne fernere Berechnung durch eine Kurbelvorrichtung vortheilhaft zu bewirken glaube. Kann aber auch auf mancherlei andere Arten geschehen, von denen ich die Auffindung der besten, nachdem ich auch den Grund zur Maschine auf die zweite Art also gelegt habe, dem Nachdenken und der Practik Anderer überlasse.

II.

Übersicht der meteorologischen Beobachtungen in Wien im Jahre 1829.

(Das Barometer befindet sich 19.946 Wiener Klafter über dem mittleren Spiegel der Donau.)

Barometerstand in P. Z. bei 0° *R.* in jedem Monate.

1829.	Mittlerer.	Höchster.	Tiefster.	Mittlere monatliche Variation.
Jänner	27.461	27.802	27.060	0.742
Februar . . .	27.676	27.990	27.153	0.837
März	27.496	27.810	26.833	1.077
April	27.299	27.616	26.638	0.978
Mai	27.550	27.840	27.253	0.587
Juni	27.531	27.780	27.181	0.599
Juli	27.540	27.814	27.214	0.600
August	27.569	27.822	27.159	0.663
September .	27.502	27.821	27.048	0.773
October . . .	27.623	27.987	26.788	1.199
November . .	27.638	27.958	27.229	0.729
December . .	27.808	28.254	27.409	0.845
Jährlicher Durchschnitt	27.558	27.874	27.075	0.802

Mittlerer Barometerstand nach den verschiedenen Beobachtungsstunden.

1 8 2 9.	Um 8 Uhr früh.	Um 3 Uhr Nachmittag.	Um 10 Uhr Abends.
Jänner	27.457	27.454	27.471
Februar . . .	27.674	27.662	27.689
März	27.503	27.491	27.496
April	27.294	27.300	27.304
Mai	27.559	27.543	27.549
Juni	27.534	27.519	27.533
Juli	27.550	27.538	27.534
August	27.573	27.566	27.567
September . .	27.505	27.488	27.512
October . . .	27.639	27.604	27.625
November . . .	27.643	27.629	27.644
December . . .	27.812	27.798	27.808
JährlicherDurchschnitt . . .	27.562	27.549	27.561

Barometerstand bei verschiedenen Winden.

Windesrichtung.	Barometerstand.	Anzahl der Beobachtungen, aus denen das Mittel entsprang.
S.	27.547	37
SO.	27.573	184
O.	27.539	59
NO.	27.545	13
N.	27.651	100
NW.	27.609	184
W.	27.531	407
SW.	27.547	37

Temperatur der Luft nach *Réaumur.*

1829.	Mittlere.	Gröfste.	Kleinste.
Jänner . . .	— 2°.87	4°.5	—16°.0
Februar . . .	— 3°.16	6°.4	—10°.5
März	1°.97	13°.0	— 4°.0
April	8°.43	20°.0	+ 1°.0
Mai.	11°.05	20°.5	2°.5
Juni	13°.03	23°.2	6°.0
Juli.	16°.82	25°.0	9°.5
August . . .	14°.15	24°.0	8°.7
September . .	12°.93	21°.0	7°.2
October . . .	6°.39	17°.0	0°.0
November . .	0°.05	9°.0	— 7°.3
December . .	— 5°.72	— 0°.5	—13°.0
Jährlicher Durchschnitt . . .	6°.09	15°.3	— 1°.3

Temperatur nach den verschiedenen Beobachtungsstunden.

1829.	Um 8 Uhr früh.	Um 3 Uhr Nachmittag.	Um 10 Uhr Abends.
Jänner . . .	— 3°.56	— 1°.77	— 3°.30
Februar . . .	— 4°.29	— 1°.35	— 3°.84
März	+ 0°.26	+ 4°.53	+ 1°.14
April	+ 6°.56	+11°.52	+ 7°.20
Mai.	+ 9°.44	+14°.29	+ 9°.43
Juni	11°.68	+15°.76	11°.66
Juli.	15°.35	+20°.01	15°.09
August . . .	12°.52	+17°.29	12°.64
September . .	11°.31	15°.72	11°.78
October . . .	5°.06	8°.93	5°.18
November . .	— 0°.68	1°.69	— 0°.86
December . .	— 6°.42	— 4°.67	— 6°.08
Jährlicher Durchschnitt . . .	+ 4°.77	8°.50	+ 5°.34

Beschaffenheit der Atmosphäre.

1829.	Heiter.	Wolken mit Sonnensch.	Trüb.	Nebel.	Regen.	Schnee.	Gewitter.	Herrschender Wind.
Jänner . .	1	8	22	5	1	14	—	W.
Februar .	4	12	12	7	3	10	—	NW. u. WNW.
März . .	3	24	4	11	4	3	—	W. und NW.
April . .	—	23	7	5	12	—	—	W.
Mai . . .	4	25	2	2	17	—	2	NW.
Juni . . .	2	23	5	3	14	—	—	W. u. WNW.
Juli . . .	4	27	—	—	18	—	5	W.
August . .	3	20	8	1	16	—	1	W.
September	—	25	5	10	15	—	3	W. und SO.
October .	6	19	6	11	9	—	—	W. und SO.
November .	—	20	10	13	6	6	—	W.
December .	6	11	4	11	—	12	—	SO.
Jährl. Durchschnitt .	33	237	95	79	115	45	11	W. und SO.

Wenn man diese Ergebnisse mit denen vergleicht, welche sich aus achtjährigen Beobachtungen (Bd. VI., S. 293) im Durchschnitt ergeben, so lernt man den meteorologischen Charakter des Jahres 1829 genauer kennen.

Der mittlere Luftdruck dieses Jahres weicht nur wenig von dem mehrjährigen Mittel ab, jener entspricht nämlich einer Quecksilbersäule von 27.558 P. Z., dieser einer Quecksilbersäule von 27.594 Höhe. Der Unterschied beläuft sich nur auf 0.036 P. Zolle.

Unter den zwölf Monaten gibt der April den kleinsten mittleren Druck, und derselbe Monat hat auch nach dem mehrjährigen Durchschnitte die kleinste mittlere Barometerhöhe; der gröfste mittlere Luftdruck kommt auch in diesem Jahre dem December zu, während nach einem gröfseren Durchschnitte der Februar den gröfsten Luftdruck hat; doch nimmt auch für dieses Jahr der dem Monat Februar entsprechende Luftdruck der Gröfse

nach den zweiten Platz ein. Sonst kommt der Luftdruck des Monats August dem mittleren Luftdrucke am nächsten; im Jahre 1829 fand dieses mit dem Drucke im Monat Mai Statt, jedoch weicht der Druck für August auch nicht stark vom allgemeinen Mittel ab.

Die mittlere monatliche Variation des Luftdruckes ist für das hier in Rede stehende Jahr gröſser, als für einen Durchschnitt aus mehreren Jahren; denn erstere beträgt 0.802 Z., während sich letztere nur auf 0.758 Z. erhebt. Im Allgemeinen ist diese Variation in Wien am gröſsten im März, am kleinsten im Juli. In diesem Jahre hatte der October die gröſste, und der Juli die kleinste monatliche Variation; jedoch gehört auch da dem Monat Mai eine der gröſsten Variationen.

Man sieht hieraus, daſs dieses Jahr in Betreff der Änderungen und der Gröſse des Luftdruckes nichts Ausgezeichnetes enthält. Anders verhält es sich mit den Wärmeverhältnissen.

Aus dem achtjährigen Durchschnitte, den wir im Vorhergehenden zum Vergleichungspunct genommen haben, ergibt sich eine mittlere Temperatur von $8^{0}.70$ *R*. Das Jahr 1829 hat aber nur eine mittlere Temperatur von $6^{0}.09$, blieb also um $2^{0}.61$ *R*. unter dem allgemeinen Mittel zurück.

Im Allgemeinen gilt die Regel, daſs die Temperatur des Octobers der mittleren des ganzen Jahres am nächsten kommt, und an diese Regel schlieſst sich auch die mittlere Temperatur dieses Jahres an. Die mittlere Temperatur des Aprils, die nach v. *Humboldt* mit der mittleren Jahreswärme nahe zusammenfallen soll, weicht nach dem mehrjährigen Durchschnitte für Wien ziemlich stark von derselben ab, und auch in diesem Jahre ist dieser Unterschied bedeutend.

Aus dem mehrjährigen Durchschnitte habe ich ge-

funden, dafs für Wien sieben Monate des Jahres eine höhere, fünf eine niedere Temperatur haben, als die mittlere Jahrestemperatur beträgt, und dafs daher die Temperatur über dem jährlichen Mittel länger anhält, aber minder von demselben abweicht, als die Temperatur unter dem jährlichen Mittel. In diesem Jahre hat sich diese Regel wieder vollkommen bewährt.

Im Allgemeinen hat in Wien nur der Jänner eine negative mittlere Temperatur, die mittlere Temperatur aller übrigen Monate ist positiv. Das Jahr 1829 macht aber von dieser Regel eine gewaltige Ausnahme, indem drei Monate, nämlich Jänner, Februar und December, eine unter dem Eispuncte stehende mittlere Temperatur hatten.

Die höchste Temperatur des wärmsten Monates (Juli) ist im Allgemeinen gleich 26°.92 *R.*, die niederste des kältesten (Jänner) beträgt — 8°.61. In unserem Jahre hat der wärmste Monat nur die Temperatur 25°, der kälteste die Temperatur —16° erreicht.

Das Mittel aus den höchsten Temperaturen der einzelnen Monate belauft sich im Allgemeinen in Wien auf 17°.38, das Mittel aus den niedrigsten auf 1°.52. Für das Jahr 1829 ist das Mittel aus den höchsten Temperaturen der einzelnen Monate gleich 15°.3, das Mittel aus den niedrigsten —1°.3.

Demnach ist das hier in Rede stehende Jahr durch seine besondern Wärmeverhältnisse höchst ausgezeichnet.

III.

Über den optischen Interferenzversuch;

von

A. Baumgartner.

Daſs zwei Lichtstrahlen unter den gehörigen Umständen auf einander einwirken, sich gegenseitig verstärken, schwächen oder gar aufheben können, hat schon *Grimaldi* gekannt, und *Hoock* hat in seiner *Micrographia*, London 1667, die Farben dünner Plättchen aus dieser Einwirkung erklärt. In der neueren Zeit hat diese Modification neuerdings *Th. Young* aus seiner Ansicht über die Natur des Lichtes angenommen. Als es ihm nämlich geglückt war, aus der Zusammensetzung der Bewegung der schwingenden Theile der Schallwellen einige wichtige akustische Phänomene zu erklären (*Phil. transact.* 1800, *p.* 130), versuchte er es, in der Voraussetzung, daſs das Licht in ähnlichen Schwingungen bestehe, wie der Schall, diese Zusammensetzung auch auf Erklärung der Farben dünner oder gestreifter Plättchen anzuwenden.

Das Resultat dieser Arbeit legte er der königlichen Societät der Wissenschaften am 12. November 1801 vor. Sie ist in den *Phil. transact.* für 1802 enthalten, und in *Gilbert's* Annalen, Bd. 39, von Professor *Ludicke* übersetzt. Erst im Jahre 1804 wurde in den *Transactions* für dieses Jahr ein von demselben Gelehrten ausgegangener Beweis des Interferenzprincipes bekannt gemacht. Nach diesem Beweise und den mit den genauesten Erfahrungen übereinstimmenden Folgerungen aus diesem Principe sah *Young* dasselbe nicht mehr als Hypothese an, und erkannte die Statthaftigkeit desselben unabhän-

gig von der Voraussetzung, durch welche er darauf geleitet wurde. Dieses beweiset eine Stelle in seinem *Cours of lectures on natural philosophy*, dessen erster Band im Jahre 1807 in London herauskam, worin es p. 471 heifst: »Die Genauigkeit, mit welcher sich das allgemeine Princip der Interferenz des Lichtes auf so viele und so verschiedene Erscheinungen in den mannigfaltigsten Umständen anwenden läfst, beweiset dessen Richtigkeit hinreichend *(in the most satisfactory manner)*. Die gänzliche Bestätigung oder Widerlegung der Theorie, aus der es folgt, kann man nur von der Zeit und von Versuchen erwarten, etc.« Der Versuch, durch welchen *Young* das Princip der Interferenz zuerst beweiset, ist heut zu Tage fast allgemein bekannt, und besteht darin, dafs er in einen divergirenden Lichtbüschel, der durch eine kleine Öffnung in ein verfinstertes Zimmer drang, einen Kartenstreifen von $^1/_{30}$ Z. Breite stellte, und die Wirkung betrachtete, welche ein Schirm, den er inner den Grenzen des Schattens jenes Streifens aufstellte, in den Farbensäumen, die dieser Schatten mit sich führte, hervorbrachte.

Das Verschwinden aller Farbensäume, ungeachtet das an der anderen Grenze des Kartenstreifens vorbeigehende Licht in seinem Fortgange durchaus nicht gehindert war, bewies das Entstehen der Farbensäume aus der *Interferenz* der Lichtstrahlen, die am Rande des Streifens, nach *Young's* Ausdruck, inflectirt oder vielmehr diffrangirt werden. Es beruht also dieser Beweis auf der Interferenz des *gebeugten* Lichtes. Die Beugung bewirkte hier nur das Zusammentreffen von Strahlen, die von ihrer Quelle an ungleiche Wege zurückgelegt haben. Es blieb aber noch übrig, dasselbe für Licht zu beweisen, das ohne vorläufige Veränderung sich interferiren konnte, oder das durch *Reflexion* und *Bre-*

chung in dieselben Umstände versetzt ward, in welche es im vorhergehenden Falle durch Beugung kam; besonders wird es wichtig seyn, dieses mit weiſsem reflectirtem Lichte zu bewirken, weil man weiſs, daſs durch die Reflexion dieses Lichtes allein für sich keine Farbenphänomene erzeugt werden, und daher jede Spur von Färbung in den Strahlen, welche sich nach ihrer Reflexion interferiren, als Wirkung der Interferenz angesehen werden muſs. *Young* hat selbst dieses Phänomen bei Licht hervorgebracht, das durch zwei kleine, einander nahe Öffnungen in ein verfinstertes Zimmer geleitet wurde. Die zwei Öffnungen konnten so weit von einander abstehen, und auch so groſs seyn, daſs das Licht als ungebeugt angesehen werden durfte. Doch war es schwer, die Farbenstreifen rein und deutlich zu erhalten, weil die kleinste Ungleichheit in der Gröſse und Gestalt der zwei Öffnungen einen störenden Einfluſs ausübte. Man muſste daher suchen, das Licht von *einer* Öffnung zur Interferenz zu bringen. Dieses leistete *Fresnel*, und sein Versuch verdient als vorzüglichste Stütze des Interferenz-Principes angesehen zu werden. Er besteht bekanntlich darin, daſs er einen von einem physischen Puncte aus divergirenden Strahlenbüschel auf zwei ebene, nur wenig gegen einander geneigte Spiegel fallen läſst. In diesen werden die Strahlen so reflectirt, als kämen sie von zwei vollkommen gleichen, einander sehr nahen, hinter den Spiegeln befindlichen Puncten, und interferiren sich demnach vor den Spiegeln. Dieser Versuch gehört aber zu den delicatesten in der ganzen Optik, und selbst der geübteste Experimentator wird ihn nicht ohne vielfaches Tâtonnement mit Erfolg anzustellen im Stande seyn, wenn er sich nicht einer besonders zu diesem Versuche bestimmten Vorrichtung bedient, welche alle Adjustirungen, die die

Natur des Versuches fordert, schnell und sicher zu vollziehen gestattet. Ich habe den *Fresnel*'schen Versuch unzählige Male vorgenommen, und dabei alle Vorsichtsmaſsregeln angewendet, welche dieser ausgezeichnete Gelehrte empfiehlt, war auch so glücklich, das Phänomen, um das es sich handelt, so rein als es die Natur des Verfahrens erlaubt, darzustellen, sah aber zugleich bald ein, daſs es höchst nothwendig sey, zu diesem Behufe ein eigenes Instrument einzurichten, und das Verfahren in etwas abzuändern.

Fresnel läſst das Licht durch einen Fensterladen in ein verfinstertes Zimmer eindringen, nachdem er demselben durch einen Planspiegel, der mit einem Heliostat in Verbindung stehen kann, eine horizontale Richtung gegeben hat, fängt den Lichtbüschel mittelst einer Convexlinse mit kurzer Brennweite auf, damit derselbe im Brennpuncte der Linse zu einem leuchtenden physischen Puncte vereiniget werde, von welchem nun die Strahlen auf die Spiegel fallen.

Nach dieser Maſsregel können die aus der Interferenz der Strahlen hervorgehenden Farbenstreifen nur die Höhe des Bildes im Brennpuncte der Linse erhalten, und werden weder zum Wahrnehmen, noch weniger aber zum Messen die nöthige Höhe bekommen. Um nun die Farbenstreifen so hoch zu erhalten, daſs sie deutlich gesehen werden können, bringe ich am Fensterladen eine etwa 1 Z. hohe, $^1/_4$ Z. breite Öffnung an, und decke sie mit einem cylindrischen Glase, welches das eindringende Licht in horizontalem Sinne zu einer leuchtenden physischen Linie vereiniget, ohne es in verticalem Sinne abzulenken. Fig. 26 stellt dieses Glas im Längen- und Querdurchschnitte vor.

Die Spiegel, auf welche das von der genannten Lichtlinie her divergirende Licht fällt, und die *Fresnel*

blofs mittelst Wachs auf einen verticalen Träger befestiget, sind mit einer besondern Fassung und mit mehreren Stellschrauben versehen, durch welche sie leicht in die erforderliche Lage gegen einander gebracht werden können. Die Figuren 27, 28 und 29 stellen sie sammt dem Zugehör in halber Gröfse nach drei auf einander senkrechten Durchschnitten dar. Sie bestehen aus schwarzem Glase, sind vollkommen plan, und stossen in MN unter einem Winkel zusammen, der wenig von 180° verschieden ist. Die ebene Metallplatte AB dient ihnen zur Rückwand. Vier hervorstehende Stifte, wovon in Fig. 27 nur drei, i, k, l, sichtbar sind, haben die Bestimmung zu verhindern, dafs die Spiegel sich nicht längs der Rückwand verschieben können. Dabei werden sie noch durch die hakenförmigen Ansätze c, e, f, gh unterstützt, die aber aufser diesem Nebendienste hauptsächlich das zu leisten haben, einen Spiegel an die an der Rückplatte befindliche Feder r (Fig. 29), den anderen an die Stifte t und s anzudrücken. Einer der beiden Spiegel erhält einen völlig unveränderlichen Stand, der andere läfst sich nach zwei auf einander senkrechten Richtungen gegen den ersten bewegen. Dazu dienen die Schrauben d und m (Fig. 27, 29). Die letztere gestattet den beweglichen Spiegel so zu stellen, dafs die Spiegelflächen beider sich in einer bestimmten Linie schneiden; der erste dient zur Vergröfserung oder Verkleinerung des Winkels, unter welchem beide Spiegelflächen gegen einander geneigt sind.

Fresnel sieht auf die Interferenzstellen mittelst einer convexen Linse hin. Ich bediene mich aber dazu eines guten achromatischen Fernrohres, das in einiger Entfernung von dem Spiegelapparate aufgestellt wird. Ich habe mich überzeugt, dafs das Interferenz-Phänomen an Reinheit und Deutlichkeit ausnehmend gewinnt,

wenn man die Öffnung des Objectives dieses Fernrohres in verticaler Richtung durch zwei geradlinige Schirme so verengt, dafs etwa nur der Breite nach die Hälfte der ganzen Öffnung übrig bleibt, während dieselbe der Höhe nach unverändert geblieben ist.

Beim Gebrauche dieses Apparates kommt es nun hauptsächlich darauf an, dafs man den Spiegeln die rechte Lage gegen einander und gegen das Fernrohr gibt, und die Entfernungen des Spiegels von der Fensteröffnung und des Fernrohres von den Spiegeln richtig bestimmt.

Die Entfernung der Spiegel vom Fenster mag 4—6 Fufs betragen, die des Fernrohres von den Spiegeln eben so viel; überhaupt mufs die letztere Entfernung so beschaffen seyn, dafs man im Fernrohre das doppelte Bild der Lichtlinie deutlich sieht. Ist daher die Ocularröhre des Fernrohres lang, und es daher möglich, einen ziemlich nahe gelegenen Punct durch dasselbe deutlich sehen zu können, so kann man diese Entfernung vermindern; bei den gewöhnlichen Fernröhren wird man diese Distanz meistens über 4 F. vergröfsern müssen, weil ihr Ocular nicht so weit vom Objective entfernt werden kann, um das Bild eines nur 8 F. vom Objective abstehenden Körpers in die deutliche Sehweite bringen zu können.

Die Spiegel müssen gegen das an der Fensteröffnung befindliche Glas so gestellt werden, dafs die gerade Linie, in welcher sich ihre spiegelnden Flächen schneiden, mit der Axe des cylindrischen Glases parallel ist; die Stellung der Spiegel gegen das Fernrohr ist dem Zwecke angemessen, wenn man beide Bilder der Lichtlinie im Gesichtsfelde hat.

Stehen diese zwei Bilder zu weit von einander ab, so vermindert man mittelst der Schraube *d* die Neigung

der Spiegel gegen einander, bis die rechte Entfernung der Bilder eingetreten ist. Ist dieses der Fall, so sieht man von jedem Bilde rechts und links einen Lichtstreifen von der Höhe der Lichtlinie ausgehen. Fallen diese Streifen von beiden Öffnungen zwischen zwei parallele Linien, so daſs sie gleichsam einen continuirlichen Streifen bilden, so haben die Spiegel die gehörige Lage gegen einander, widrigenfalls muſs man diese Lage mittelst der Schraube *m* dahin abändern, daſs die Lichtstreifen die genannte Lage erhalten.

Der Apparat ist so, wie er hier beschrieben wurde, von Herrn *Plöſsl* ausgeführt; die Genauigkeit und Reinheit der Arbeit ist dieses ausgezeichneten Künstlers vollkommen würdig. Ein Fernrohr von seiner Hand mit einer Öffnung von einem Zoll, besonders wenn es mit einem astronomischen Aufsatze versehen ist, leistet zur Beobachtung der Wirkung dieses Apparates alles, was man erwarten kann.

IV.

Verallgemeinerung der *Poisson*'schen Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der mittlern Resultate der Beobachtungen in den *Additions à la Connaiss. des tems de* 1827;

von

Dr. *C. Fr. Hauber.*

In dem *Memoire sur la Probabilité des résultats moyens des Observations* in der *Conn. des tems de* 1827, *p.* 273—302, hat *Poisson* seine Untersuchungen über das vortheilhafteste Resultat aus einer groſsen Anzahl von Beobachtungen und über die Genauigkeit dieses Resultats auf den Fall beschränkt, wo nur *eine* Gröſse gesucht wird. Da man aber hiemit in den Anwendungen nicht ausreicht, so möchte es interessant seyn, diese Untersuchnngen auch auf mehrere zu bestimmende Gröſsen ausgedehnt zu sehen. Die Fortsetzung jenes *Mémoire*, welche in die *Connoiss. des tems de* 1832 eingerückt ist, enthält die Verallgemeinerung, von der ich hier spreche, nicht. Der früher von *Laplace* in der *Theorie analyt. des Probabilités, Livre II. Chap. IV.*, gegebene Beweis für die Methode der kleinsten Quadrate ist schon bei zwei gesuchten Gröſsen ziemlich weitläufig, statt daſs *Gauſs* in der *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*, von andern Principien ausgehend, den Beweis ganz allgemein für irgend eine Anzahl zu bestimmender Gröſsen auf eine kurze und einfache Art geführt hat. Es läſst sich aber durch ein dem *Gauſs*'schen ähnliches Verfahren auch auf den von *Poisson* in dem angeführten *Mem.* (Nro. 9) bewiesenen Satz, welchen ich im Folgenden der Kürze wegen den

Satz A) nennen will, ein allgemeiner Beweis für die Methode der kleinsten Quadrate nebst Bestimmung der Genauigkeit der Resultate gründen, welches auch die Anzahl der gesuchten Gröſsen seyn mag. Übrigens setzt dieser Beweis voraus, was *Laplace* und *Poisson* bei diesen Untersuchungen überall voraussetzen, daſs die Anzahl der Beobachtungen sehr groſs sey.

1) Zur Bestimmung irgend einer Anzahl von gesuchten Gröſsen oder von Correctionen schon nahe bekannter Elemente habe man aus den Beobachtungen die linearen Bedingungsgleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= a x + b y + c z + \ldots - \delta, \\ \varepsilon_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots - \delta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n &= a_n x + b_n y + c_n z + \ldots - \delta_n, \\ &\text{u. s. w.,} \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

wo $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ resp. die Fehler der ersten, zweiten, ... $(n+1)^{\text{ten}}$, ... Beobachtung bezeichnen, und wo $x, y, z, \ldots$ die gesuchten Gröſsen sind. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers Δ bei Beobachtungen von der Art, zu welcher die erste, zweite, ... $(n+1)^{\text{te}}$, ... dieser Beobachtungen gehört, werde resp. durch $\varphi\Delta, \varphi_1\Delta, \ldots \varphi_n\Delta, \ldots$ ausgedrückt, und es sey

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\varphi_n\Delta . d\Delta = K_n, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2\varphi_n\Delta . d\Delta = K_n'$$

$$\text{und} \quad \tfrac{1}{2}(K_n' - K_n^2) = h_n^2.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (1) resp. mit den Factoren $g, g_1, \ldots g_n, \ldots$, und addirt sie, so erhält man

$$\Sigma g_n \varepsilon_n = x\Sigma g_n a_n + y\Sigma g_n b_n + z\Sigma g_n c_n + \ldots$$
$$\ldots - \Sigma g_n \delta_n, \quad . \quad (2)$$

und nach dem Satze A) ist bei einer groſsen Anzahl von

Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit, dafs der wahre Werth von $\Sigma g_n \varepsilon_n$ zwischen den Grenzen

$\Sigma g_n K_n - 2r\sqrt{\Sigma g_n^2 h_n^2}$ und $\Sigma g_n K_n + 2r\sqrt{\Sigma g_n^2 h_n^2}$

liege,

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr,$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, π die *Ludolph*'sche Zahl, und wo das Integral von $r=0$ an zu nehmen ist.

Um nun z. B. x zu bestimmen, mufs man die Factoren $g, g_1, \ldots g_n, \ldots$ so wählen, dafs in der Gleichung (2) x den Factor 1 erhalte, und $y, z, \ldots$ eliminirt werden, oder dafs man habe

$$\Sigma g_n a_n = 1, \quad \Sigma g_n b_n = 0, \quad \Sigma g_n c_n = 0, \text{ u. s. w.} \quad (3)$$

Ist die Anzahl der Beobachtungen der Anzahl der gesuchten Gröfsen gleich, so werden durch die Gleichungen (3) die Factoren $g, g_1, \ldots g_n, \ldots$ völlig bestimmt; ist aber, was wir hier voraussetzen, die Anzahl der Beobachtungen gröfser, als die Anzahl der zu bestimmenden Gröfsen $x, y, z \ldots$, so leisten unzählige Systeme von Factoren den Gleichungen (3) Genüge. Nimmt man irgend ein solches System, so ist nach (2)

$$x = \Sigma g_n \varepsilon_n + \Sigma g_n \delta_n,$$

und man erhält einen genäherten Werth von x

$$= \Sigma g_n K_n + \Sigma g_n \delta_n,$$

und die Wahrscheinlichkeit, dafs der in Beziehung auf diesen Werth von x zu befürchtende Fehler zwischen den Grenzen

$$\pm u = \pm 2r\sqrt{\Sigma g_n^2 h_n^2}$$

liege, ist $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr.$

Die vortheilhafteste Bestimmung von x wird dieje-

nige seyn, für welche die Grenzen $\pm u$ des zu befürchtenden Fehlers bei derselben Wahrscheinlichkeit am engsten werden, d. h. bei welcher der Coefficient von r in dem Ausdrucke für u am kleinsten ist. Unter allen Systemen von Factoren $g, g_1, \ldots g_n, \ldots$, welche den Gleichungen (3) Genüge leisten, muſs man also dasjenige wählen, für welches $\Sigma g_n^2 h_n^2$ den kleinsten möglichen Werth erhält. Dieses System findet man auf folgende Art:

Es sey μ ein beliebiger constanter Factor, und man setze

$$\left.\begin{aligned}
X &= \mu \Sigma \frac{a_n}{h_n^2}(\varepsilon_n + \delta_n) = \\
&= x.\mu\Sigma\frac{a_n^2}{h_n^2} + y.\mu\Sigma\frac{a_n b_n}{h_n^2} + z.\mu\Sigma\frac{a_n c_n}{h_n^2} + \ldots \\
Y &= \mu \Sigma \frac{b_n}{h_n^2}(\varepsilon_n + \delta_n) = \\
&= x.\mu\Sigma\frac{b_n a_n}{h_n^2} + y.\mu\Sigma\frac{b_n^2}{h_n^2} + z.\mu\Sigma\frac{b_n c_n}{h_n^2} + \ldots \\
Z &= \mu \Sigma \frac{c_n}{h_n^2}(\varepsilon_n + \delta_n) = \\
&= x.\mu\Sigma\frac{c_n a_n}{h_n^2} + y.\mu\Sigma\frac{c_n b_n}{h_n^2} + z.\mu\Sigma\frac{c_n^2}{h_n^2} + \ldots \\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Aus diesen Gleichungen suche man durch Elimination $x, y, z \ldots$ unbestimmt durch $X, Y, Z \ldots$ ausgedrückt, so daſs man Gleichungen erhalte von der Form:

$$\left.\begin{aligned}
x &= [\alpha^2] X + [\alpha\beta] Y + [\alpha\gamma] Z + \ldots \\
y &= [\beta\alpha] X + [\beta^2] Y + [\beta\gamma] Z + \ldots \\
z &= [\gamma\alpha] X + [\gamma\beta] Y + [\gamma^2] Z + \ldots \\
&\text{u. s. w.,}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

und man setze

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= \mu \frac{a_n}{h_n^2}[\alpha^2] + \mu \frac{b_n}{h_n^2}[\alpha\beta] + \mu \frac{c_n}{h_n^2}[\alpha\gamma] + \dots \\ \beta_n &= \mu \frac{a_n}{h_n^2}[\beta\alpha] + \mu \frac{b_n}{h_n^2}[\beta^2] + \mu \frac{c_n}{h_n^2}[\beta\gamma] + \dots \\ \gamma_n &= \mu \frac{a_n}{h_n^2}[\gamma\alpha] + \mu \frac{b_n}{h_n^2}[\gamma\beta] + \mu \frac{c_n}{h_n^2}[\gamma^2] + \dots \\ &\text{u. s. w.;} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (6)$$

so ist vermöge der Gleichungen (4), (5) und (6) unbestimmt

$$x = \Sigma \alpha_n (\varepsilon_n + \delta_n), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wo $\varepsilon_n + \delta_n = a_n x + b_n y + c_n z + \dots$

ist; daraus folgt

$$\Sigma \alpha_n a_n = 1, \quad \Sigma \alpha_n b_n = 0, \quad \Sigma \alpha_n c_n = 0, \text{ u. s. w.} \quad (8)$$

Setzt man also $g = \alpha$, $g_1 = \alpha_1$, ... $g_n = \alpha_n$, ..., so leistet dieses Factorensystem den Gleichungen (3) Genüge. Für irgend ein anderes System von Factoren, welche diesen Gleichungen ebenfalls Genüge leisten, ist

$$\Sigma (g_n - \alpha_n) a_n = 0, \quad \Sigma (g_n - \alpha_n) b_n = 0,$$
$$\Sigma (g_n - \alpha_n) c_n = 0, \text{ u. s. w.}$$

Wenn man diese Gleichungen resp. mit $[\alpha^2]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, ... multiplicirt und addirt, so erhält man nach (6)

$$\Sigma (g_n - \alpha_n) \frac{\alpha_n h_n^2}{\mu} = 0$$

oder $\Sigma (2 g_n \alpha_n - 2 \alpha_n^2) h_n^2 = 0$,

oder, da $2 g_n \alpha_n = g_n^2 + \alpha_n^2 - (\alpha_n - g_n)^2$ ist,

$$\Sigma g_n^2 h_n^2 = \Sigma \alpha_n^2 h_n^2 + \Sigma (\alpha_n - g_n)^2 h_n^2.$$

Da nun $\Sigma (\alpha_n - g_n)^2 h_n^2$ immer positiv ist, wenn nicht $g = \alpha$, $g_1 = \alpha_1$, ... $g_n = \alpha_n$, ... ist, so erhält offenbar $\Sigma g_n^2 h_n^2$ seinen kleinsten Werth für $g = \alpha$, $g_1 = \alpha_1$, ... $g_n = \alpha_n$, ...; diefs ist also das vor-

theilhafteste Factorensystem zur Bestimmung von x. Demnach ist der plausibelste Werth von x

$$= \Sigma \alpha_n K_n + \Sigma \alpha_n \delta_n ;$$

und die Wahrscheinlichkeit, dafs der bei dieser Bestimmung von x zu befürchtende Fehler zwischen den Grenzen

$$\pm u = \pm 2r\sqrt{\Sigma \alpha_n^2 h_n^2}$$

liege, ist $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr$.

Eben so sind die plausibelsten Werthe von y, z . . . resp.

$$= \Sigma \beta_n K_n + \Sigma \beta_n \delta_n, \quad \Sigma \gamma_n K_n + \Sigma \gamma_n \delta_n, \ldots,$$

und die Grenzen der bei diesen Bestimmungen zu befürchtenden Fehler mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr$$

respective

$$\pm u' = \pm 2r\sqrt{\Sigma \beta_n^2 h_n^2},$$
$$\pm u'' = \pm 2r\sqrt{\Sigma \gamma_n^2 h_n^2},$$
u. s. w.

Man sieht, dafs $\Sigma \alpha_n \delta_n$, $\Sigma \beta_n \delta_n$, $\Sigma \gamma_n \delta_n$, . . . diejenigen Werthe von x, y, z . . . sind, die man aus den Gleichungen (5) erhält, wenn man setzt

$$\mu \Sigma \frac{a_n}{h_n^2} \varepsilon_n = 0, \quad \mu \Sigma \frac{b_n}{h_n^2} \varepsilon_n = 0, \quad \mu \Sigma \frac{c_n}{h_n^2} \varepsilon_n = 0, \text{ u. s. w.,}$$

oder

$$\frac{d . \Sigma \frac{\varepsilon_n^2}{h_n^2}}{dx} = 0, \quad \frac{d . \Sigma \frac{\varepsilon_n^2}{h_n^2}}{dy} = 0, \quad \frac{d . \Sigma \frac{\varepsilon_n^2}{h_n^2}}{dz} = 0, \text{ u. s. w.,}$$

oder wenn man $\Sigma \frac{\varepsilon_n^2}{h_n^2}$ zu einem *Minimum* macht.

Übrigens ist klar, dafs man, um die plausibelsten

Werthe von $x, y, z \ldots$ vermittelst der Gleichungen (4) u. s. w. zu berechnen, nicht die absoluten Werthe von $h^2, h_1^2, \ldots h_n^2, \ldots$, sondern nur ihr Verhältnifs zu kennen braucht. Dieses wird aber bekannt seyn, wenn man das Verhältnifs der Genauigkeit der Beobachtungen kennt. Ist nämlich die Wahrscheinlichkeit, dafs bei Beobachtungen von der Art, zu welcher die erste der vorliegenden Beobachtungen gehört, der Fehler nicht gröfser als Δ sey, eben so grofs, als die Wahrscheinlichkeit, dafs bei Beobachtungen von der Art, zu welcher die zweite, dritte, ... $(n+1)^{\text{te}}$, ... jener Beobachtungen gehört, der Fehler resp. nicht gröfser als $l_1\Delta, l_2\Delta, \ldots l_n\Delta, \ldots$ sey (d. h. ist die Genauigkeit der Beobachtungen von der ersten, zweiten, dritten, ... $(n+1)^{\text{ten}}$, ... Art resp. den Zahlen $1, l_1, l_2, \ldots l_n, \ldots$ umgekehrt proportional), so ist

$$\int \varphi\Delta . d\Delta = \int \varphi_1(l_1\Delta)\, d.(l_1\Delta) = \int \varphi_2(l_2\Delta)\, d.(l_2\Delta) \ldots$$
$$\ldots = \int \varphi_n(l_n\Delta)\, d.(l_n\Delta) \ldots,$$

also

$$\varphi\Delta = l_1\varphi_1(l_1\Delta) = l_2\varphi_2(l_2\Delta) \ldots = l_n\varphi_n(l_n\Delta) \ldots,$$

folglich
$$K_1' = \int_{-\infty}^{+\infty} (l_1\Delta)^2 \varphi_1(l_1\Delta)\, d.(l_1\Delta)$$
$$= l_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 \varphi\Delta . d\Delta = l_1^2 K'$$

und
$$K_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (l_1\Delta)\varphi_1(l_1\Delta)\, d.(l_1\Delta)$$
$$= l_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\varphi\Delta . d\Delta = l_1 K,$$

mithin

$$h_1^2 = \tfrac{1}{2}(K_1' - K_1^2) = \tfrac{1}{2} l_1^2 (K' - K^2) = l_1^2 h^2,$$

und eben so $h_2^2 = l_2^2 h^2, \ldots h_n^2 = l_n^2 h^2$, u. s. w.

2) Sind die Beobachtungen alle von gleichem Werthe, so ist

$$K = K_1 \ldots = K_n \ldots \text{ und } h^2 = h_1^2 \ldots = h_n^2 \ldots$$

Da μ willkürlich ist, so kann man setzen $\mu = h^2$ oder $\frac{\mu}{h^2} = 1$. Dann ist nach (6)

$$\alpha_n = a_n [\alpha^2] + b_n [\alpha\beta] + c_n [\alpha\gamma] + \ldots;$$

es ist aber nach (8)

$$\alpha a + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots = 1,$$
$$\alpha b + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots = 0,$$
$$\alpha c + \alpha_2 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots = 0,$$
u. s. w.;

wenn man diese Gleichungen resp. mit $[\alpha^2]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, n. s. w. multiplicirt und addirt, so erhält man

$$\Sigma \alpha_n^2 = [\alpha^2].$$

Eben so läfst sich beweisen, dafs $\Sigma \beta_n^2 = [\beta^2]$, $\Sigma \gamma_n^2 = [\gamma^2]$ ist, u. s. w.

Hier gehen also die obigen Ausdrücke für x, y, z . . . und u, u', u'' . . . in folgende über:

$$x = K \Sigma \alpha_n + \Sigma \alpha_n \delta_n, \quad u = 2rh\sqrt{[\alpha^2]},$$
$$y = K \Sigma \beta_n + \Sigma \beta_n \delta_n, \quad u' = 2rh\sqrt{[\beta^2]},$$
$$z = K \Sigma \gamma_n + \Sigma \gamma_n \delta_n, \quad u'' = 2rh\sqrt{[\gamma^2]},$$
u. s. w.

Gewöhnlich setzt man $K = 0$, d. h. man setzt voraus, dafs gleiche positive und negative Fehler der Beobachtungen gleich wahrscheinlich seyen. Unter dieser Voraussetzung erhält man die plausibelsten Werthe von x, y, z . . ., wenn man $\Sigma \varepsilon_n^2$ zu einem *Minimum* macht, d. h. wenn man setzt

$$\Sigma a_n \delta_n = x \Sigma a_n^2 + y \Sigma a_n b_n + z \Sigma a_n c_n + \ldots,$$
$$\Sigma b_n \delta_n = x \Sigma b_n a_n + y \Sigma b_n^2 + z \Sigma b_n c_n + \ldots,$$
$$\Sigma c_n \delta_n = x \Sigma c_n a_n + y \Sigma c_n b_n + z \Sigma c_n^2 + \ldots,$$
u. s. w.

Sucht man aus diesen Gleichungen durch Elimination für x, y, z . . . Ausdrücke von der Form:

$$x = [\alpha^2] \Sigma a_n \delta_n + [\alpha\beta] \Sigma b_n \delta_n + [\alpha\gamma] \Sigma c_n \delta_n + \ldots,$$
$$y = [\beta\alpha] \Sigma a_n \delta_n + [\beta^2] \Sigma b_n \delta_n + [\beta\gamma] \Sigma c_n \delta_n + \ldots,$$
$$z = [\gamma\alpha] \Sigma a_n \delta_n + [\gamma\beta] \Sigma b_n \delta_n + [\gamma^2] \Sigma c_n \delta_n + \ldots,$$
u. s. w.,

so sind diefs die plausibelsten Werthe von $x, y, z \ldots$, und die Grenzen der in Beziehung auf diese Werthe zu befürchtenden Fehler mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr$$

sind resp.

$$\pm\ 2rh\sqrt{[\alpha^2]},\quad \pm\ 2rh\sqrt{[\beta^2]},\quad \pm\ 2rh\sqrt{[\gamma^2]},\ \ldots,$$

wo $h^2 = \frac{1}{2}K' = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 \varphi\Delta \,.\, d\Delta$ ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs der bei dieser Bestimmung von x zu befürchtende Fehler zwischen den Grenzen $\pm u$ liege, ist

$$= \frac{1}{h\sqrt{[\alpha^2]\pi}} \int e^{-\frac{u^2}{4h^2[\alpha^2]}} du,$$

das Integral von $u = 0$ an genommen.

Der Factor, mit welchem in diesem Ausdrucke u^2 in dem negativen Exponenten von e multiplicirt ist, ist das, was *Laplace* das Gewicht P des Resultats nennt; demnach ist P

für $x = \frac{1}{4h^2[\alpha^2]}$;

eben so für $y = \frac{1}{4h^2[\beta^2]}$,

u. s. w.

Die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr$ wird $= \frac{1}{2}$ für $r = 0.4769363$, also ist der sogenannte wahrscheinliche Fehler der Bestimmung von x

$$= 0.47694 \times 2h\sqrt{[\alpha^2]} = \frac{0.47694}{\sqrt{P}}.$$

Drückt $\psi u \,.\, du$ die Wahrscheinlichkeit aus, dafs der Fehler der Bestimmung von x zwischen u ued $u + du$ liege, so ist

$$\int \psi u \,.\, du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2}\, dr \quad \text{für} \quad u = 2rh\sqrt{[\alpha^2]},$$

$$\text{also} \quad \psi u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-r^2} \,.\, \frac{dr}{du} = \frac{e^{-r^2}}{2h\sqrt{[\alpha^2]\,\pi}};$$

und der mittlere zu befürchtende Fehler jener Bestimmung in dem Sinne, in welchem *Laplace* diesen Ausdruck gebraucht, ist

$$= \pm \int_0^\infty u\psi u \,.\, du = \pm \frac{2h\sqrt{[\alpha^2]}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty r e^{-r^2}\, dr$$

$$= \pm \frac{h\sqrt{[\alpha^2]}}{\sqrt{\pi}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{P\pi}}.$$

Hingegen das Quadrat des mittlern zu befürchtenden Fehlers jener Bestimmung in dem Sinne, in welchem *Gaufs* in der *Theoria combinationis observationum* diesen Ausdruck gebraucht, ist

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \psi u \,.\, du = \frac{4h^2[\alpha^2]}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr = 2h^2[\alpha^2],$$

wo $2h^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 \varphi\Delta \,.\, d\Delta$ das Quadrat des mittlern zu befürchtenden Fehlers einer Beobachtung ist. Da *Gaufs* das Gewicht dem Quadrate des mittlern Fehlers umgekehrt proportional setzt, so ist das Gewicht der Bestimmung von x nach *Gaufs*, das Gewicht einer Beobachtung zur Einheit genommen, $= \frac{1}{[\alpha^2]}$. *Gaufs* hat diefs bewiesen, ohne dazu einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers des Resultats zu gebrauchen.

3) Sowohl *Laplace* als *Gaufs* haben als Grundsatz angenommen, dafs die vortheilhafteste Combination der Beobachtungen diejenige sey, bei welcher der mittlere zu befürchtende Fehler des Resultats ein *Minimum* werde; aber in dem Begriffe dieses mittlern Fehlers weichen

sie von einander ab. Will man auf den *Laplace*'schen Begriff des mittlern zu befürchtenden Fehlers einen allgemeinen Beweis für die Methode der kleinsten Quadrate bei einer beliebigen Anzahl zu bestimmender Elemente gründen, so kann man so verfahren: drückt bei irgend einem Systeme von Factoren g, g_1, ... g_n, ... welche den Gleichungen (3) Genüge leisten, $\psi u \,.\, du$ die Wahrscheinlichkeit aus, dafs der in Beziehung auf den Werth von $x = \Sigma g_n K_n + \Sigma g_n \delta_n$ zu befürchtende Fehler zwischen u und $u + du$ liege, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler zwischen den Grenzen $-u$ und $+u$ liege,

$$= \int u \left[\psi u + \psi(-u)\right] du,$$

das Integral von $u = 0$ an genommen. Aber nach dem Satze A) ist diese Wahrscheinlichkeit $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr$, wenn man $u = 2r\sqrt{\Sigma g_n^2 h_n^2}$ setzt; folglich ist

$$\psi u + \psi(-u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-r^2} \,.\, \frac{dr}{du},$$

und daher $\int_0^\infty u \left[\psi u + \psi(-u)\right] du$, oder der mittlere Werth jenes Fehlers, die Fehler ohne Rücksicht auf das Zeichen genommen,

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\Sigma g_n^2 h_n^2} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = 2\sqrt{\frac{\Sigma g_n^2 h_n^2}{\pi}}.$$

Damit dieser ein *Minimum* werde, mufs man dasjenige Factorensystem wählen, für welches $\Sigma g_n^2 h_n^2$ den kleinsten möglichen Werth erhält, wie oben.

Überhaupt würde man zu denselben Resultaten gelangen, wenn man als Grundsatz annähme, dafs der mittlere Werth irgend einer Potenz mit einem positiven ganzen Exponenten p (für ein ungerades p die Fehler ohne Rücksicht auf das Zeichen genommen) von dem

bei der Bestimmung jeder der gesuchten Gröſsen zu befürchtenden Fehler zu einem *Minimum* gemacht werden solle. Es ist nämlich, wenn wieder $\psi u \,.\, du$ die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daſs der in Beziehung auf den Werth von $x = \Sigma g_n K_n + \Sigma g_n \delta_n$ zu befürchtende Fehler zwischen u und $u + du$ liege,

$$\int_0^\infty u^p \left[\psi u + \psi(-u)\right] du =$$

$$= \frac{2^{p+1}}{\sqrt{\pi}} (\Sigma g_n^2 h_n^2)^{\frac{p}{2}} \int_0^\infty r^p e^{-r^2} dr,$$

wo für ein gerades p

$$\int_0^\infty r^p e^{-r^2} dr = 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (p-1) \,.\, 2^{-\frac{p}{2}} \,.\, \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

und für ein ungerades p

$$\int_0^\infty r^p e^{-r^2} dr = \tfrac{1}{2} \times 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right) \text{ ist.}$$

In beiden Fällen ist klar, daſs $\int_0^\infty u^p \left[\psi u + \psi(-u)\right] du$ den kleinsten Werth erhält, wenn man die Factoren $g, g_1, \ldots g_n, \ldots$ so wählt, daſs $\Sigma g_n^2 h_n^2$ ein *Minimum* wird.

4) Ich will nun einen Weg zur Bestimmung der Gröſse $K = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \varphi \Delta \,.\, d\Delta$, welche *Gauſs* den constanten Theil des Fehlers nennt, zu zeigen suchen, vorausgesetzt, daſs die Function $\varphi \Delta$ für alle Beobachtungen, deren Anzahl durch s bezeichnet werden soll, dieselbe sey.

Substituirt man in den ursprünglichen Bedingungsgleichungen (1) für x den Ausdruck $\Sigma \alpha_n (\varepsilon_n + \delta_n)$ aus (7), für y den analogen Ausdruck $\Sigma \beta_n (\varepsilon_n + \delta_n)$, u. s. w., so erhält man

$$\varepsilon_n = a_n \Sigma \alpha_n (\varepsilon_n + \delta_n) + b_n \Sigma \beta_n (\varepsilon_n + \delta_n) + \ldots - \delta_n,$$

oder, wenn λ_n den Werth bezeichnet, den die Function $a_n x + b_n y + \ldots - \delta_n$ erhält, wenn man darin für $x, y \ldots$ die Werthe $\Sigma \alpha_n \delta_n$, $\Sigma \beta_n \delta_n \ldots$ setzt, für welche $\Sigma \varepsilon_n^2$ ein *Minimum* wird,

$$\varepsilon_n = \lambda_n + a_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n + b_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n + \ldots, \quad (9)$$

also $\Sigma \varepsilon_n - \Sigma a_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n - \Sigma b_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n - \ldots = \Sigma \lambda_n$

oder $\Sigma (1 - \alpha_n \Sigma a_n - \beta_n \Sigma b_n - \ldots) \varepsilon_n = \Sigma \lambda_n$.

Aber nach dem Satze A) ist die Wahrscheinlichkeit, daſs der Werth von $\Sigma (1 - \alpha_n \Sigma a_n - \beta_n \Sigma b_n - \ldots) \varepsilon_n$ zwischen

$$K (s - \Sigma a_n \Sigma \alpha_n - \Sigma b_n \Sigma \beta_n - \ldots) \pm$$
$$\pm\, 2 r h \sqrt{\Sigma (1 - \alpha_n \Sigma a_n - \beta_n \Sigma b_n - \ldots)^2}$$

liege, $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr$.

Demnach erhält man einen genäherten Werth von K

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{\Sigma \lambda_n}{s - \Sigma a_n \Sigma \alpha_n - \Sigma b_n \Sigma \beta_n - \ldots} \\ \text{oder } &= \frac{\Sigma a_n \Sigma \alpha_n \delta_n + \Sigma b_n \Sigma \beta_n \delta_n + \ldots - \Sigma \delta_n}{s - \Sigma a_n \Sigma \alpha_n - \Sigma b_n \Sigma \beta_n - \ldots} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

und die Grenzen des in Beziehung auf diesen Werth von K zu befürchtenden Fehlers mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr$ sind

$$= \pm \rho = \pm \frac{2 r h \sqrt{\Sigma (1 - \alpha_n \Sigma a_n - \beta_n \Sigma b_n - \ldots)^2}}{s - \Sigma a_n \Sigma \alpha_n - \Sigma b_n \Sigma \beta_n - \ldots}. \quad (11)$$

Wendet man diese Ausdrücke auf den Fall an, wo nur *eine* Gröſse x gesucht wird, wo also b_n u. s. w. $= 0$, und $\alpha_n = \frac{a_n}{\Sigma a_n^2}$ ist, so erhält man nach (10)

$$K = \frac{\Sigma \lambda_n \Sigma a_n^2}{s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2} = \frac{\Sigma a_n \Sigma a_n \delta_n - \Sigma a_n^2 \Sigma \delta_n}{s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2}, \quad (12)$$

und nach (11)

$$\pm v = \pm \frac{2rh\sqrt{\Sigma(\Sigma a_n^2 - a_n \Sigma a_n)^2}}{s\Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2}$$

$$= \pm \frac{2rh\sqrt{s(\Sigma a_n^2)^2 - (\Sigma a_n)^2 \Sigma a_n^2}}{s\Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2}$$

$$= \pm \frac{2rh\sqrt{\Sigma a_n^2}}{\sqrt{s\Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2}}.$$

Es ist aber

$$(\Sigma a_n)^2 =$$
$$= \Sigma a_n^2 + 2(a a_1 + a a_2 + \ldots + a a_{s-1} + a_1 a_2 + \ldots \text{etc.}),$$

und wenn man die Summe der Quadrate der Differenzen je zweier der Factoren a, a_1, ... a_n, ... a_{s-1} durch D^2 bezeichnet, so ist

$$D^2 = (s-1)\Sigma a_n^2 - 2(a a_1 + a a_2 + \ldots$$
$$\ldots + a a_{s-1} + a_1 a_2 + \ldots \text{etc.}),$$

also $D^2 = s\Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2$.

Demnach lassen sich die Werthe von K und $\pm v$ auch so ausdrücken:

$$K = \frac{\Sigma \lambda_n \Sigma a_n^2}{D^2} \quad \text{oder} \quad = \frac{\Sigma a_n \Sigma a_n \delta_n - \Sigma a_n^2 \Sigma \delta_n}{D^2},$$

$$\text{und} \quad \pm v = \pm \frac{2rh\sqrt{\Sigma a_n^2}}{D},$$

welche Ausdrücke mit denjenigen übereinstimmen, die *Poisson* in der *Conn. des tems pour* 1827, *p.* 298, auf eine andere Art abgeleitet hat.

Man sieht, dafs diese Bestimmung von K in denjenigen Fällen unbrauchbar ist, wo die Factoren a, a_1, ... a_n, ... einander gleich oder nur wenig von einander verschieden sind.

Substituirt man in dem Ausdrucke für den plausibelsten Werth von x

$$= K\Sigma a_n + \Sigma a_n \delta_n = K\frac{\Sigma a_n}{\Sigma a_n^2} + \frac{\Sigma a_n \delta_n}{\Sigma a_n^2}$$

für K seinen Werth aus der Gleichung (12), so er-

hält man

$$x = \frac{s\Sigma a_n \delta_n - \Sigma a_n \Sigma \delta_n}{s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2}.$$

Man kann auch in den ursprünglichen Bedingungsgleichungen zu den gesuchten Gröſsen $x, y, z \ldots$ noch die K als eine unbestimmte Gröſse hinzufügen, die in jeder Bedingungsgleichung eben so, wie $\delta, \delta_1, \ldots \delta_n, \ldots$ den Factor -1 hat, und z. B. in dem Ausdrucke für x die K eben so, wie $y, z \ldots$ eliminiren (vergl. das erste *Suppl.* zu *Lapl. Théorie anal. des Prob.*, *p.* 20). Die Gleichungen, aus denen die plausibelsten Werthe von K, x, y, u. s. w. durch Elimination abgeleitet werden müssen, sind dann folgende:

$$\Sigma \varepsilon_n = 0, \text{ oder } x \Sigma a_n + y \Sigma b_n + \ldots$$
$$\ldots - sK - \Sigma \delta_n = 0,$$

$$\Sigma a_n \varepsilon_n = 0, \text{ oder } x \Sigma a_n^2 + y \Sigma a_n b_n + \ldots$$
$$\ldots - K \Sigma a_n - \Sigma a_n \delta_n = 0,$$

$\Sigma b_n \varepsilon_n = 0$, u. s. w.

Hat auſser K noch eine von den gesuchten Gröſsen $x, y \ldots$ in jeder Bedingungsgleichung den Factor 1, so kann diese nicht von K abgesondert bestimmt werden.

Wendet man dieses Verfahren auf den Fall an, wo auſser K nur *eine* Gröſse x gesucht wird, so findet man den plausibelsten Werth von x

$$= \frac{s \Sigma a_n \delta_n - \Sigma a_n \Sigma \delta_n}{s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2},$$

wie oben, und die Grenzen des in Beziehung auf diesen Werth von x zu befürchtenden Fehlers mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr$

$$= \pm\, 2rh \sqrt{\frac{s}{s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2}};$$

ferner den plausibelsten Werth von K

$$= \frac{\Sigma a_n \Sigma a_n \delta_n - \Sigma a_n^2 \Sigma \delta_n}{s \Sigma a_n - (\Sigma a_n)^2},$$

wie oben, und die Grenzen

$$\pm \rho = \pm 2rh \sqrt{\frac{\Sigma a_n^2}{s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2}},$$

wie oben.

5) Wie die Gröſse $K' = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 \varphi \Delta . d\Delta$ zu bestimmen sey, darüber hat *Gauſs* in der *Theoria comb. obs. art* 37 *seqq.* Untersuchungen angestellt, ohne dabei, wie sonst gewöhnlich geschah, die Fehler der Beobachtungen selbst als bekannt vorauszusetzen; er hat aber angenommen, daſs K oder $\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \varphi \Delta . d\Delta = 0$ sey. Ich will nun zeigen, wie man einen genäherten Werth von K' oder von $h^2 = \frac{1}{2}(K' - K^2)$ finden könne, wenn man von K schon einen genäherten Werth kennt.

Vermöge der Gleichung (9) hat man

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \varepsilon - a \Sigma \alpha_n \varepsilon_n - b \Sigma \beta_n \varepsilon_n - \ldots, \\ \lambda_1 = \varepsilon_1 - a_1 \Sigma \alpha_n \varepsilon_n - b_1 \Sigma \beta_n \varepsilon_n - \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n = \varepsilon_n - a_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n - b_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n - \ldots, \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \quad (13)$$

Wenn man diese Gleichungen resp. mit λ, λ_1, ... λ_n, ... multiplicirt und addirt, so erhält man

$$\Sigma \lambda_n^2 = \Sigma \lambda_n \varepsilon_n - \Sigma a_n \lambda_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n - \Sigma b_n \lambda_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n - \ldots$$

aber aus der Art, wie λ_n bestimmt worden ist, erhellt, daſs man hat

$$\Sigma a_n \lambda_n = 0, \quad \Sigma b_n \lambda_n = 0, \quad \text{u. s. w.};$$

demnach ist

$$\Sigma \lambda_n^2 = \Sigma \lambda_n \varepsilon_n \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Die Gleichungen (13) resp. mit ε, ε_1, ... ε_n, ... multiplicirt und addirt, geben

$$\Sigma \varepsilon_n \lambda_n = \Sigma \varepsilon_n^2 - \Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n - \Sigma b_n \varepsilon_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n - \ldots,$$

woraus vermittelst der Gleichung (14) folgt:

$$\Sigma \lambda_n^2 = \Sigma \varepsilon_n^2 - \Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n - \Sigma b_n \varepsilon_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n - \ldots (15)$$

Je grösser die Anzahl der Beobachtungen ist, desto eher ist zu erwarten, dass der wahre zufällige Werth der Function

$$\Sigma \varepsilon_n^2 - \Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n - \Sigma b_n \varepsilon_n \Sigma \beta_n \varepsilon_n - \ldots \quad (16)$$

von ihrem mittleren Werthe wenig verschieden seyn werde. Es ist aber der mittlere Werth von $\Sigma \varepsilon_n^2 = s K'$. Den mittleren Werth des Products $\Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n$ erhält man, wenn man in der Entwicklung dieses Products für jedes Quadrat wie ε^2, ε_1^2, ... ε_n^2, ... seinen mittlern Werth $= K'$, und für jedes Product wie $\varepsilon \varepsilon_1$, $\varepsilon \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, ... seinen mittlern Werth $= K^2$ setzt. So findet sich der mittlere Werth von $\Sigma a_n \varepsilon_n \Sigma \alpha_n \varepsilon_n$

$$= K' \Sigma a_n \alpha_n + K^2 (\Sigma a_n \Sigma \alpha_n - \Sigma a_n \alpha_n),$$

oder nach (8)

$$= K' + K^2 (\Sigma a_n \Sigma \alpha_n - 1).$$

Auf ähnliche Art lassen sich die mittlern Werthe der übrigen Producte in der Function (16) ausdrücken; demnach ist der mittlere Werth der Summe dieser Producte, deren Anzahl der Zahl ρ der gesuchten Grössen x, y, z ... gleich ist,

$$= \rho K' + K^2 (\Sigma a_n \Sigma \alpha_n + \Sigma b_n \Sigma \beta_n + \ldots - \rho),$$

und daher der mittlere Werth der Function (16)

$$= (s - \rho) K' - K^2 (\Sigma a_n \Sigma \alpha_n + \Sigma b_n \Sigma \beta_n + \ldots - \rho).$$

Die Gleichung (15) gibt also einen genäherten Werth von K'

$$= \frac{1}{s-\rho} \left[\Sigma \lambda_n^2 + K^2 (\Sigma a_n \Sigma \alpha_n + \Sigma b_n \Sigma \beta_n + \cdots - \rho)\right], \quad (17)$$

oder einen genäherten Werth von $2h^2$ oder $K' - K^2$

$$= \frac{1}{s-\rho} \left[\Sigma \lambda_n^2 - K^2 (s - \Sigma a_n \Sigma \alpha_n - \Sigma b_n \Sigma \beta_n - \ldots)\right]. \quad (18)$$

Für den Fall, wo nur *eine* Gröſse x gesucht wird, gibt die Gleichung (17)

$$K' = \frac{\Sigma \lambda_n^2 \, \Sigma a_n^2 + K^2 \left[(\Sigma a_n)^2 - \Sigma a_n^2 \right]}{(s-1) \Sigma a_n^2},$$

und die Gleichung (18)

$$2 h^2 = \frac{\Sigma \lambda_n^2 \, \Sigma a_n^2 - K^2 \left[s \Sigma a_n^2 - (\Sigma a_n)^2 \right]}{(s-1) \Sigma a_n^2}$$

$$= \frac{\Sigma \lambda_n^2 \, \Sigma a_n^2 - K^2 D^2}{(s-1) \Sigma a_n^2},$$

wo $\Sigma \lambda_n^2 \Sigma a_n^2 = \Sigma a_n^2 \, \Sigma \delta_n^2 - (\Sigma a_n \, \delta_n)^2$ ist.

Setzt man $K = 0$, so verwandeln sich die Gleichungen (17) und (18) in folgende:

$$K' = 2 h^2 = \frac{\Sigma \lambda_n^2}{s - \rho},$$

welches der von *Gauſs* gegebene Ausdruck für den genäherten Werth des Quadrats des mittlern Fehlers einer Beobachtung ist.

6) *Laplace* hat im dritten *Supplément à la Théorie analytique des Probab.*, *p.* 29 — 36, eine *Methode générale du calcul des probabilités, lorsqu'il y a plusieurs sources d'erreurs*, gegeben. Er zeigt nämlich, wie die plausibelsten Werthe der gesuchten Gröſsen $x, y, z \ldots$ zu bestimmen seyen, wenn jede von den aus den Beobachtungen abgeleiteten Bedingungsgleichungen, wie $a_n x + b_n y + c_n z + \ldots - \delta_n = 0$, mehreren zufälligen Fehlern ausgesetzt ist, die aus verschiedenen von einander unabhängigen Quellen entspringen, für welche das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler nicht dasselbe ist, und wenn die von jeder Quelle herrührenden Fehler in den Bedingungsgleichungen mit Factoren multiplicirt sind, welche für die verschiedenen Fehlerquellen und für die verschiedenen Gleichungen

verschieden sind. So ist zum Beispiel jede gemessene und wegen der terrestrischen Refraction verbesserte Zenithdistanz eines terrestrischen Objects aus zwei Ursachen fehlerhaft, nämlich wegen der Unsicherheit der Messung selbst, und wegen der Veränderlichkeit der terrestrischen Refraction; der Fehler des angenommenen Refractionscoefficienten wird mit einem Factor multiplicirt, der von der Entfernung des Objects abhängt. Jede Beobachtung am Passageinstrument ist wenigstens zwei zufälligen Fehlern ausgesetzt, weil das Ohr die Schläge der Uhr nicht richtig theilt, und weil das Auge den Durchgang durch den Faden nicht scharf sieht; der letztere Fehler wird mit der Secante der Declination des Sterns multiplicirt. Überhaupt würde diese *Méthode générale* ohne Zweifel in sehr vielen Fällen brauchbar seyn, wenn nicht ihre Anwendung zu mühsam wäre oder es an den erforderlichen *Datis* dazu fehlte. Sind die Factoren, mit denen die Fehler multiplicirt sind, in allen Gleichungen dieselben, so reducirt sich das Verfahren auf die gewöhnliche Methode der kleinsten Quadrate. Ich will nun diesen Gegenstand analog mit dem obigen Beweise für die Methode der kleinsten Quadrate behandeln.

Es sey

$$\left.\begin{array}{l} a x + b y + c z + \ldots - \delta = p \varepsilon + p' \varepsilon' \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots - \delta_1 = p_1 \varepsilon_1 + p'_1 \varepsilon'_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots - \delta_n = p_n \varepsilon_n + p'_n \varepsilon'_n \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.,} \end{array}\right\} \quad (19)$$

wo $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots$ die aus der ersten, $\varepsilon', \varepsilon'_1, \ldots$ die aus der zweiten Quelle entspringenden zufälligen Fehler, und $p, p_1, \ldots p', p'_1, \ldots$ bekannte Factoren sind. (Der Kürze wegen beschränke ich mich auf zwei Feh-

lerquellen, da man von selbst sieht, wie die Untersuchung auf mehrere auszudehnen sey.) Die Function, welche das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler ausdrückt, sey für die erste Quelle $\varphi\Delta$, für die zweite $\varphi'\Delta$, und es sey

$$\varphi\Delta = \varphi(-\Delta), \quad \varphi'\Delta = \varphi'(-\Delta), \quad \text{und}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 \varphi\Delta . d\Delta = m^2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 \varphi'\Delta . d\Delta = m'^2,$$

also das, was wir oben durch K_n bezeichnet haben, $= o$, und das, was oben $2h_n^2$ hieſs, in Beziehung auf ε, $\varepsilon_1, \ldots = m^2$ und in Beziehung auf ε', $\varepsilon'_1, \ldots = m'^2$.

Multiplicirt man, um x zu bestimmen, die Gleichungen (19) resp. mit Factoren g, g_1, ... g_n, ..., welche den Gleichungen (3) Genüge leisten, so erhält man

$$x - \Sigma g_n \delta_n = \Sigma g_n p_n \varepsilon_n + \Sigma g_n p'_n \varepsilon'_n.$$

Da die Fehler ε_n und ε'_n u. dgl. von einander unabhängig sind, so kann man hier den Satz A) eben so anwenden, wie wenn diese Fehler verschiedenen Beobachtungen oder Gleichungen zugehörten. Nach diesem Satze ist die Wahrscheinlichkeit, daſs

$$\Sigma g_n p_n \varepsilon_n + \Sigma g_n p'_n \varepsilon'_n,$$

oder der in Beziehung auf den Werth von $x = \Sigma g_n \delta_n$ zu befürchtende Fehler zwischen den Grenzen

$$\pm\, r\sqrt{2(m^2 \Sigma g_n^2 p_n^2 + m'^2 \Sigma g_n^2 p_n'^2)}$$

liege,

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr,$$

woraus erhellt, daſs man, um x auf's vortheilhafteste zu bestimmen, unter allen Systemen von Factoren, welche den Gleichungen (3) Genüge leisten, dasjenige wählen muſs, für welches $m^2 \Sigma g_n^2 p_n^2 + m'^2 \Sigma g_n^2 p_n'^2$, oder, wenn man

$$p_n^2 + \frac{m'^2}{m^2} p_n'^2 = q_n^2$$

setzt, für welches $\Sigma g_n^2 q_n^2$ den kleinsten möglichen Werth erhält. Die Bestimmung dieses vortheilhaftesten Factorensystems ist offenbar der in Nro. 1) entwickelten ganz analog, wenn man nur q_n^2 statt des dortigen h_n^2, und $p_n \varepsilon_n + p_n' \varepsilon_n'$ statt des dortigen ε_n setzt. Eben so verhält es sich mit den übrigen gesuchten Gröfsen y, z . . . Demnach wird man die plausibelsten Werthe von x, y, z . . . erhalten, wenn man $\Sigma \frac{(p_n \varepsilon_n + p_n' \varepsilon_n')^2}{q_n^2}$ zu einem *Minimum* macht, d. h. wenn man setzt

$$\Sigma \frac{a_n}{q_n^2} (p_n \varepsilon_n + p_n' \varepsilon_n') = 0, \quad \Sigma \frac{b_n}{q_n^2} (p_n \varepsilon_n + p_n' \varepsilon_n') = 0, \text{ u. s. w.,}$$

$$\text{oder} \quad \Sigma \frac{a_n (p_n \varepsilon_n + p_n' \varepsilon_n')}{m^2 p_n^2 + m'^2 p_n'^2} = 0, \quad \text{u. s. w.,}$$

oder

$$x \Sigma \frac{a_n^2}{q_n^2} + y \Sigma \frac{a_n b_n}{q_n^2} + z \Sigma \frac{a_n c_n}{q_n^2} + \ldots - \Sigma \frac{a_n \delta_n}{q_n^2} = 0,$$

u. s. w.

7) Um diese Methode anwenden zu können, müfste man die Werthe von m^2 und m'^2 oder wenigstens ihr Verhältnifs zu einander kennen. Hat man eine bedeutende Anzahl Gleichungen von der Form (19), in welchen die Factoren, mit denen die Fehler multiplicirt sind, wie p_n, p_n', dieselben Werthe, z. B. G, G', haben, so läfst sich nach der in Nro. 5) angeführten Methode (das obige $K = 0$ gesetzt) der mittlere Werth des Quadrats des Fehlers einer solchen Gleichung, oder der mittlere Werth von $(G \varepsilon_n + G' \varepsilon_n')^2$, d. h. (da der mittlere Werth von $\varepsilon_n^2 = m^2$, der mittlere Werth von $\varepsilon_n'^2 = m'^2$, und da unter der Voraussetzung $\varphi\Delta = \varphi(-\Delta)$,

$\varphi' \Delta = \varphi' (-\Delta)$ der mittlere Werth des Products $\varepsilon_n \varepsilon'_n = 0$ ist) der Werth von $G^2 m^2 + G'^2 m'^2$ näherungsweise bestimmen. Hat man ferner eine bedeutende Anzahl anderer Gleichungen, in welchen jene Factoren dieselben Werthe H, H' haben, so läfst sich eben so der Werth von $H^2 m^2 + H'^2 m'^2$ näherungsweise bestimmen. Ist nun z. B.

$$\left.\begin{array}{l} G^2 m^2 + G'^2 m'^2 = A \\ H^2 m^2 + H'^2 m'^2 = B \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

gefunden worden, so erhält man hieraus

$$m^2 = \frac{A H'^2 - B G'^2}{G^2 H'^2 - G'^2 H^2},$$

$$m'^2 = \frac{B G^2 - A H^2}{G^2 H'^2 - G'^2 H^2},$$

$$\text{also} \quad \frac{m'^2}{m^2} = \frac{B G^2 - A H^2}{A H'^2 - B G'^2}.$$

Verstatten die durch die Beobachtungen gegebenen Gleichungen noch mehrere den Gleichungen (20) analoge Gleichungen zu bilden, so kann man hieraus m^2 und m'^2 nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen.

Laplace lehrt ohne die Voraussetzung, dafs in mehreren von den gegebenen Bedingungsgleichungen die Fehler mit denselben Factoren multiplicirt seyen, durch vorläufige Behandlung der Gleichungen nach der gewöhnlichen Methode der kleinsten Quadrate (wo man setzt $x \Sigma a_n^2 + y \Sigma a_n b_n + z \Sigma a_n c_n + \ldots - \Sigma a_n \delta_n = 0$, u. s. w.), m^2 und m'^2 mittelst der Werthe von $\Sigma p_n^2 \lambda_n^2$ und $\Sigma p_n'^2 \lambda_n^2$ näherungsweise bestimmen, wo λ_n den Werth bezeichnet, den die Function $a_n x + b_n y + c_n z + \ldots - \delta_n$ erhält, wenn man für x, y, z . . . ihre nach der Methode der kleinsten Quadrate gefundenen Werthe substituirt. Er setzt dabei $\lambda_n = p_n \varepsilon_n + p'_n \varepsilon'_n$. Will man genauer verfahren, so ist eigentlich nach (13), wenn man an die Stelle des obigen ε_n setzt $p_n \varepsilon_n + p'_n \varepsilon'_n$, und wenn

α_n, β_n ... dieselbe Bedeutung haben, wie oben,

$$\lambda_n = p_n \varepsilon_n + p'_n \varepsilon'_n - a_n \Sigma \alpha_n (p_n \varepsilon_n + p'_n \varepsilon'_n)$$
$$- b_n \Sigma \beta_n (p_n \varepsilon_n + p'_n \varepsilon'_n) - \ldots$$

Hieraus folgt

$$\Sigma p_n^2 \lambda_n^2 = \Sigma p_n^4 \varepsilon_n^2 + 2 \Sigma p_n^3 p'_n \varepsilon_n \varepsilon'_n + \Sigma p_n^2 p_n'^2 \varepsilon_n'^2$$
$$- 2 \Sigma a_n (p_n^3 \varepsilon_n + p_n^2 p'_n \varepsilon'_n) \Sigma \alpha_n (p_n \varepsilon_n + p'_n \varepsilon'_n)$$
$$+ \Sigma a_n^2 p_n^2 [\Sigma \alpha_n (p_n \varepsilon_n + p'_n \varepsilon'_n)]^2$$
$$- 2 \Sigma b_n (p_n^3 \varepsilon_n + p_n^2 p'_n \varepsilon'_n) \Sigma \beta_n (p_n \varepsilon_n + p'_n \varepsilon'_n) + \ldots$$

Substituirt man hier für die Gröſsen $\Sigma p_n^4 \varepsilon_n^2$ u. s. w. ihre mittleren Werthe, was um so eher erlaubt seyn wird, je gröſser die Anzahl der Beobachtungen ist, so erhält man

$$\Sigma p_n^2 \lambda_n^2 = m^2 \Sigma p_n^4 + m'^2 \Sigma p_n^2 p_n'^2 - 2 m^2 \Sigma p_n^4 a_n \alpha_n$$
$$- 2 m'^2 \Sigma p_n^2 p_n'^2 a_n \alpha_n + \Sigma p_n^2 a_n^2 (m^2 \Sigma p_n^2 \alpha_n^2 + m'^2 \Sigma p_n'^2 \alpha_n^2)$$
$$- 2 m^2 \Sigma p_n^4 b_n \beta_n - \ldots$$

Eben so findet man

$$\Sigma p_n'^2 \lambda_n^2 = m'^2 \Sigma p_n'^4 + m^2 \Sigma p_n^2 p_n'^2$$
$$- 2 m'^2 \Sigma p_n'^4 a_n \alpha_n - \ldots$$

Aus diesen zwei Gleichungen lassen sich die Werthe von m^2 und m'^2 durch Elimination bestimmen.

Wenn nur *eine* Gröſse x gesucht wird, so ist

$$\alpha_n = \frac{a_n}{\Sigma a_n^2}, \text{ also}$$

$$\Sigma p_n^2 \lambda_n^2 = m^2 \Sigma p_n^4 + m'^2 \Sigma p_n^2 p_n'^2 - 2 m^2 \frac{\Sigma p_n^4 a_n^2}{\Sigma a_n^2}$$
$$- 2 m'^2 \frac{\Sigma p_n^2 p_n'^2 a_n^2}{\Sigma a_n^2} + m^2 \left(\frac{\Sigma p_n^2 a_n^2}{\Sigma a_n^2}\right)^2$$
$$+ m'^2 \frac{\Sigma p_n^2 a_n^2 \, \Sigma p_n'^2 a_n^2}{(\Sigma a_n^2)^2}.$$

In diesem Ausdrucke für $\Sigma \lambda_n^2 p_n^2$ sind die zwei ersten Glieder von der Ordnung s, hingegen die übrigen

von der Ordnnng 1. Demnach wird man, wenn die Anzahl der Beobachtungen sehr grofs ist, setzen können

$$\Sigma p_n^2 \lambda_n^2 = m^2 \Sigma p_n^4 + m'^2 \Sigma p_n^2 p_n'^2,$$

und eben so

$$\Sigma p_n'^2 \lambda_n^2 = m'^2 \Sigma p_n'^4 + m^2 \Sigma p_n^2 p_n'^2,$$

woraus folgt

$$m^2 = \frac{\Sigma p_n^2 \lambda_n^2 \Sigma p_n'^4 - \Sigma p_n'^2 \lambda_n^2 \Sigma p_n^2 p_n'^2}{\Sigma p_n^4 \Sigma p_n'^4 - (\Sigma p_n^2 p_n'^2)^2}$$

und $m'^2 = \dfrac{\Sigma p_n'^2 \lambda_n^2 \Sigma p_n^4 - \Sigma p_n^2 \lambda_n^2 \Sigma p_n^2 p_n'^2}{\Sigma p_n^4 \Sigma p_n'^4 - (\Sigma p_n^2 p_n'^2)^2}$,

mithin $\dfrac{m'^2}{m^2} = \dfrac{\Sigma p_n'^2 \lambda_n^2 \Sigma p_n^4 - \Sigma p_n^2 \lambda_n^2 \Sigma p_n^2 p_n'^2}{\Sigma p_n^2 \lambda_n^2 \Sigma p_n'^4 - \Sigma p_n'^2 \lambda_n^2 \Sigma p_n^2 p_n'^2}$.

V.

Über *Gaufs's* Methode zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale;

von

A. v. Ettingshausen.

1.

In der berühmten Abhandlung: »*Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*,« welche einen Bestandtheil des dritten Bandes der neueren Göttinger Commentationen ausmacht, hat *Gaufs* die numerischen Gleichungen, von deren Wurzeln die zur Anwendung seiner näherungsweisen Integrationsmethode erforderlichen Hülfsgröfsen abhängen, wie auch die numerischen Formen, welche die Beurtheilung des durch

diese Methode erreichten Grades der Genauigkeit vermitteln, durch ein recurrirendes Verfahren, welches die Frucht eines bewunderungswürdigen Kunstgriffes ist, entwickelt; hingegen die independenten Gesetze, welchen die auf diesem Wege zu Stande gebrachten Resultate unterliegen, aus letzteren bloſs durch Induction abstrahirt und angedeutet, wie die Allgemeingültigkeit dieser Gesetze gerechtfertigt werden kann, ohne sich mit einer directen Deduction derselben zu befassen, die daher noch zu wünschen übrig blieb.

Obgleich *Jacobi's* sinnreicher Aufsatz im ersten Bande des *Crelle*'schen mathematischen Journales diesem Wunsche durch eine, aus einem neuen Gesichtspuncte unternommene Betrachtung des Gegenstandes vollkommen Genüge leistet; so dürfte es doch nicht überflüssig seyn, zu zeigen, daſs die erwähnten Gesetze auch auf dem von *Gauſs* im 16ten Artikel der oben angeführten Abhandlung betretenen, aber mit den Worten: »*Attamen* »*hunc modum, qui calculos continuo molestiores adducit,* »*hic ulterius non persequemur*« wieder verlassenen Wege ohne Schwierigkeit gewonnen werden können, wenn man die Auflösung der hier sich darbietenden Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten auf die gewöhnliche Weise, jedoch so vornimmt, daſs das Bildungsgesetz der durch Elimination dieser Unbekannten entstehenden Gleichungen ohne Zwang in die Augen fällt. Ich will daher diesem Zwecke gegenwärtige Blätter widmen.

2.

Das von *Gauſs* gelehrte Verfahren, die Werthe bestimmter, d. i. zwischen gegebenen Grenzen zu nehmender, Integrale näherungsweise zu finden, ist durch eine allgemeine Ansicht der von *Newton* hiezu vorgeschlage-

nen Methode, nach welcher auch die von *Cotes* berechneten Formeln eingerichtet sind, entstanden. Diese Methode besteht, erwähnter allgemeiner Ansicht gemäſs, darin, an die Stelle der in einem zwischen gegebenen Grenzen darzustellenden Integral $\int F(x)\,dx$ erscheinenden Function $F(x)$, die niedrigste ganze rationale Function $\varphi(x)$, deren Werthe für gewisse Werthe der Variablen x mit den correspondirenden Werthen von $F(x)$ übereinstimmen, zu setzen, also das auf die vorgeschriebenen Grenzen sich beziehende Integral $\int \varphi(x)\,dx$ näherungsweise für $\int F(x)\,dx$ gelten zu lassen.

Sind die m Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ diejenigen Werthe der veränderlichen Gröſse x, in Bezug auf welche die Gleichung $F(x) = \varphi(x)$ bestehen soll, so wird, wenn man

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_m) = \psi(x),$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \psi'(x) \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(x)}{(x-a_r)\,\psi'(a_r)} = X_r$$

setzt, die niedrigste ganze rationale Function, welche man für $\varphi(x)$ nehmen kann, *Lagrange's* bekannter Formel gemäſs, durch den Ausdruck

$$X_1 F(a_1) + X_2 F(a_2) + X_3 F(a_3) + \ldots + X_m F(a_m)$$

angegeben.

Es sey nun, mit Rücksicht auf die der Integration vorgeschriebenen Grenzen:

$$\int X_1\,dx = R_1,\ \int X_2\,dx = R_2,\ \ldots \int X_m\,dx = R_m,$$

so hat man

$$\int \varphi(x)\,dx = R_1 F(a_1) + R_2 F(a_2) + \ldots + R_m F(a_m).$$

Die Coefficienten R_1, R_2, etc. hängen von der Beschaffenheit der Function $F(x)$ nicht ab, sondern werden bloſs durch die Werthe der Gröſsen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ und durch die Integrationsgrenzen bestimmt. Da das

Integral $\int F(x)\,dx$ von $x=a$ bis $x=b$ genommen denselben Werth erhält, welchen das Integral

$$\frac{b-a}{\beta-\alpha}\int F\left(a+\frac{b-a}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\right)dx$$

zwischen den Grenzen $x=\alpha$ und $x=\beta$ annimmt, so kann man die Integrationsgrenzen für alle Fälle nach Belieben festsetzen, und daher, sobald über die Werthe von a_1, a_2, a_3, . . . a_m verfügt worden ist, die Coefficienten R_1, R_2, etc. ein für alle Mal berechnen und zu künftigem Gebrauche in Tabellen bringen.

Cotes liefs die Zahlen a_1, a_2, a_3, . . . a_m eine arithmetische Progression bilden, deren erstes Glied mit der einen und deren letztes Glied mit der anderen der beiden Integrationsgrenzen zusammenfällt. Es ist klar, dafs bei dieser Annahme, die übrigens die einfachste ist. welche man zu erdenken vermag, der zwischen den Integralen $\int F(x)\,dx$ und $\int\varphi(x)\,dx$ bestehende Unterschied durch Steigerung der Anzahl m oben angeführter Zahlen, wie auch immer die Function $F(x)$ beschaffen seyn mag, so klein gemacht werden kann, als man will. Da aber bei derselben Anzahl der Gröfsen a_1, a_2, a_3, . . . a_m der Betrag des Unterschiedes

$$\int F(x)\,dx - \int\varphi(x)\,dx$$

sich ändert, wenn die Werthe, welchen man diesen Gröfsen beigelegt hat, verändert werden, so dringt sich die Frage auf, ob nicht, wenigstens in so ferne die Form der Function $F(x)$ gewissen Bedingungen entspricht, die Werthe von a_1, a_2, a_3, . . . a_m so vortheilhaft gewählt werden können, als es, ohne in die specielle Beschaffenheit der Function $F(x)$ einzudringen, nur immer möglich ist. Diefs leistete *Gaufs* in der oben angeführten Abhandlung durch Betrachtungen, welche im Wesentlichen mit den hier nachfolgenden übereinstimmen.

3.

Es sey die Function $F(x)$ von der Art, dafs weder sie selbst, noch einer ihrer Differenzialquotienten

$$\frac{dF(x)}{dx}, \quad \frac{d^2F(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^3F(x)}{dx^3}, \ldots$$

für $x = 0$ unendlich grofs ausfällt. Diese Function wird sich bei dieser Beschaffenheit nach den steigenden Potenzen der Variablen x mit ganzen positiven Exponenten entwickeln lassen, so, dafs man

$$F(x) = K_0 + K_1 x + K_2 x^2 + K_3 x^3 + \ldots$$
$$\ldots + K_r x^r + F_r(x)$$

hat, wobei $F_r(x)$ die auf das Glied $K_r x^r$ folgende Ergänzung der Reihe $K_0 + K_1 x + K_2 x^2 +$ etc. zu dem Werthe von $F(x)$ vorstellt.

Bezeichnet man die niedrigsten ganzen rationalen Functionen von x, deren Werthe für $x = a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ mit jenen der Functionen x^r und $F_r(x)$ übereinstimmen, durch $\omega_r(x)$ und $\varphi_r(x)$, so ist offenbar

$$\varphi(x) = K_0 + K_1 \omega_1(x) + K_2 \omega_2(x) + K_3 \omega_3(x) + \ldots$$
$$\ldots + K_r \omega_r(x) + \varphi_r(x).$$

Aber $\omega_r(x)$ ist nothwendig der Rest, welchen man erhält, wenn man x^r durch das Product

$$(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_m)$$

nach dem gewöhnlichen Divisionsverfahren so lange theilt, als es angeht, ohne im Quotienten Potenzen von x mit negativen Exponenten zu erzeugen, daher mufs $\omega_r(x)$, sobald die ganze positive Zahl r kleiner ist als m, mit x^r einerlei seyn, und man findet

$$F(x) - \varphi(x) =$$
$$= K_m[x^m - \omega_m(x)] + K_{m+1}[x^{m+1} - \omega_{m+1}(x)] + \ldots$$
$$\ldots + K_r[x^r - \omega_r(x)] + F_r(x) - \varphi_r(x).$$

Es sey, der Einfachheit der künftigen Untersuchungen wegen, das Integral $\int F(x)\,dx$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=1$ zu nehmen, denn andere Grenzen werden, wie bereits oben bemerkt worden ist, leicht auf diese zurückgeführt, so haben wir, wenn wir alle Integrationen auf genannte Grenzen beziehen, und allgemein $\frac{1}{r+1} - \int \omega_r(x)\,dx = L_r$ setzen:

$$\int F(x)\,dx - \int \varphi(x)\,dx = K_m L_m + K_{m+1} L_{m+1} + \dots$$
$$\dots + K_r L_r + \int \big(F_r(x) - \varphi_r(x)\big)\,dx.$$

4.

Es ist der in 2. gegebenen Formel gemäſs

$$\int \omega_r(x)\,dx = R_1 a_1^r + R_2 a_2^r + R_3 a_3^r + \dots + R_m a_m^r,$$

mithin

$$L_r = \frac{1}{r+1} - R_1 a_1^r - R_2 a_2^r - R_3 a_3^r - \dots - R_m a_m^r,$$

$$L_{r+1} = \frac{1}{r+2} - R_1 a_1^{r+1} - R_2 a_2^{r+1} - R_3 a_3^{r+1} - \dots$$
$$\dots - R_m a_m^{r+1},$$

$$L_{r+2} = \frac{1}{r+3} - R_1 a_1^{r+2} - R_2 a_2^{r+2} - R_3 a_3^{r+2} - \dots$$
$$\dots - R_m a_m^{r+2},$$

. . . .

$$L_{r+m} = \frac{1}{r+m+1} - R_1 a_1^{r+m} - R_2 a_2^{r+m} - R_3 a_3^{r+m} - \dots$$
$$\dots - R_m a_m^{r+m}.$$

Man setze

$$\psi(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_m)$$
$$= x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \dots + A_m,$$

so findet man, wenn man die so eben aufgestellten Gleichungen der Reihe nach mit A_m, A_{m-1}, A_{m-2}, . . . A_1, 1 multiplicirt und sodann addirt, die Gleichung

$$L_{r+m} + A_1 L_{r+m-1} + A_2 L_{r+m-2} + \ldots + A_m L_r =$$
$$= \frac{1}{r+m+1} + \frac{A_1}{r+m} + \frac{A_2}{r+m-1} + \ldots + \frac{A_m}{r+1}.$$

Diese dient, wenn man erwägt, daſs die Werthe von L_0, L_1, L_2, ... L_{m-1} jederzeit der Nulle gleich sind, zur stufenweisen Berechnung von L_m, L_{m+1}, L_{m+2}, etc., sobald die Werthe von a_1, a_2, a_3, ... a_m, und durch diese die Werthe von A_1, A_2, A_3, ... A_m festgesetzt sind.

5.

Man kann die Werthe von a_1, a_2, a_3, ... a_m dergestalt einrichten, daſs die Gröſsen L_m, L_{m+1}, L_{m+2}, ... L_{2m-1} verschwinden. Hiezu wird, wie man aus 4. ersieht, erfordert, daſs die m Gleichungen

$$\frac{1}{m+1} + \frac{A_1}{m} + \frac{A_2}{m-1} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{2} + A_m = 0$$
$$\frac{1}{m+2} + \frac{A_1}{m+1} + \frac{A_2}{m} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{3} + \frac{A_m}{2} = 0$$
$$\frac{1}{m+3} + \frac{A_1}{m+2} + \frac{A_2}{m+1} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{4} + \frac{A_m}{3} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{2m} + \frac{A_1}{2m-1} + \frac{A_2}{2m-2} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{m+1} + \frac{A_m}{m} = 0$$

Statt finden. Dieselben geben unmittelbar die Werthe von A_1, A_2, A_3, ... A_m, und aus denselben folgen durch Auflösung der Gleichung

$$\psi(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 \pi^{m-3} + \ldots$$
$$\ldots + A_m = 0$$

die Werthe von a_1, a_2, a_3, ... a_m.

Um die Auflösung der obigen m Gleichungen mit Leichtigkeit zu Stande zu bringen, schreiben wir B_1 statt A_m, B_2 statt A_{m-1}, B_3 statt A_{m-2}, und allgemein B_r statt A_{m-r+1}, so daſs diese Gleichungen die Formen

$$B_1 + \tfrac{1}{2} B_2 + \tfrac{1}{3} B_3 + \tfrac{1}{4} B_4 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{m} B_m + \frac{1}{m+1} = 0,$$
$$\tfrac{1}{2} B_1 + \tfrac{1}{3} B_2 + \tfrac{1}{4} B_3 + \tfrac{1}{5} B_4 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{m+1} B_m + \frac{1}{m+2} = 0,$$
$$\tfrac{1}{3} B_2 + \tfrac{1}{4} B_2 + \tfrac{1}{5} B_3 + \tfrac{1}{6} B_4 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{m+2} B_m + \frac{1}{m+3} = 0,$$

. . . .

$$\frac{1}{m} B_1 + \frac{1}{m+1} B_2 + \frac{1}{m+2} B_3 + \frac{1}{m+3} B_4 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2m-1} B_m + \frac{1}{2m} = 0$$

annehmen.

Die Zahlen 1, 2, 3, . . . $(m-1)$, m sollen, in so ferne dieselben in einer beliebigen Ordnung gedacht werden, a, b, c, d, e, . . . i, k heifsen. Es sey nun irgend eine der unbekannten Gröfsen B_1, B_2, B_3, . . . B_m, welche wir uns unter dem Zeichen B_a vorstellen wollen, zu bestimmen.

Wird jede der aufzulösenden Gleichungen durch den in ihr erscheinenden Coefficienten einer anderen Unbekannten B_b getheilt, so erhält B_a in der $(r+1)^{ten}$ Gleichung den Coefficienten $\frac{b+r}{a+r}$, und in der $(r+2)^{ten}$ Gleichung den Coefficienten $\frac{b+r+1}{a+r+1}$. Zieht man jetzt die 1ste Gleichung von der 2ten, diese von der 3ten, u. s. w, und allgemein die $(r+1)^{te}$ Gleichung von der $(r+2)^{ten}$ ab, so fällt aus allen die Unbekannte B_b weg. In der $(r+1)^{ten}$ unter den neu entstandenen Gleichungen führt B_a den Coefficienten

$$\frac{b+r+1}{a+r+1} - \frac{b+r}{a+r} = \frac{a-b}{(a+r)(a+r+1)}.$$

folglich eine andere Unbekannte, wie B_c, den Coefficienten

$$\frac{c-b}{(c+r)(c+r+1)}.$$

Man theile jede der nun vorhandenen Gleichungen durch den in ihr vorhandenen Coefficienten von B_c, so bekömmt B_a in der $(r+1)^{\text{ten}}$ Gleichung den Coefficienten

$$\frac{a-b}{c-b}\cdot\frac{(c+r)(c+r+1)}{(a+r)(a+r+1)},$$

und in der $(r+2)^{\text{ten}}$ den Coefficienten

$$\frac{a-b}{c-b}\cdot\frac{(c+r+1)(c+r+2)}{(a+r+1)(a+r+2)}.$$

Wird hier gleichfalls jede Gleichung von der unmittelbar nachfolgenden subtrahirt, so fällt B_c aus sämmtlichen Differenzen hinaus, nnd B_a nimmt in der $(r+1)^{\text{ten}}$ unter den neu gebildeten Gleichungen den Coefficienten

$$\frac{a-b}{c-b}\cdot\frac{(c+r+1)(c+r+2)}{(a+r+1)(a+r+2)}-\frac{a-b}{c-b}\cdot\frac{(c+r)(c+r+1)}{(a+r)(a+r+1)}=$$
$$=\frac{2(a-b)(a-c)}{c-b}\cdot\frac{c+r+1}{(a+r)(a+r+1)(a+r+2)}$$

an. Theilt man jede der letzteren Gleichungen durch den in ihr vorhandenen Coefficienten einer von B_a verschiedenen Unbekannten B_d, so ist der Divisor für die $(r+1)^{\text{te}}$ Gleichung offenbar

$$\frac{2(d-b)(d-c)}{c-b}\cdot\frac{c+r+1}{(d+r)(d+r+1)(d+r+2)},$$

mithin erhält B_a hier den Coefficienten

$$\frac{(a-b)(a-c)}{(d-b)(d-c)}\cdot\frac{(d+r)(d+r+1)(d+r+2)}{(a+r)(a+r+1)(a+r+2)},$$

und in der nächsten Gleichung den Coefficienten

$$\frac{(a-b)(a-c)}{(d-b)(d-c)}\cdot\frac{(d+r+1)(d+r+2)(d+r+3)}{(a+r+1)(a+r+2)(a+r+3)},$$

so, daſs wenn, um B_d wegzubringen, jede Gleichung von

der unmittelbar folgenden abgezogen wird, in der $(r+1)^{ten}$ der dadurch zu Stande gebrachten Gleichungen bei B_a der Coefficient

$$\frac{3(a-b)(a-c)(a-d)}{(d-b)(d-c)} \cdot \frac{(d+r+1)(d+r+2)}{(a+r)(a+r+1)(a+r+2)(a+r+3)}$$

sich zeigt.

Hat man auf diese Weise sämmtliche unbekannte Gröfsen, B_a ausgenommen, eliminirt, so ist, weil sich die Anzahl der Gleichungen bei jedem Schritte um eine Einheit vermindert, am Ende nur noch eine Gleichung vorhanden, nämlich

$$\frac{(m-1)(a-b)(a-c)\ldots(a-k)}{(k-b)(k-c)\ldots(k-i)} \cdot \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+m-2)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+m-1)} \cdot B_a$$
$$+\frac{(m-1)(m+1-b)(m+1-c)\ldots(m+1-k)}{(k-b)(k-c)\ldots\ldots(k-i)} \times$$
$$\times \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+m-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots 2m} = 0,$$

deren Bildungsgesetz, da das letzte oder von den Unbekannten freie Glied in jeder der aufzulösenden Gleichungen durch die oben ausgeführten Operationen eben so in Anspruch genommen wird, wie die Coefficienten der Unbekannten B_a, aus den obigen Resultaten für $r = 0$ fliefst. Man hat also

$$B_a = -\frac{(m+1-b)(m+1-c)\ldots(m+1-k)}{(a-b)\cdot(a-c)\ldots\ldots(a-k)} \times$$
$$\times \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+m-1)}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots 2m}.$$

Aber $b, c, d, \ldots k$ bedeuten sämmtliche von a verschiedene unter den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$, mithin ist

$$(m+1-b)(m+1-c)\ldots(m+1-k) =$$
$$= m(m-1)\ldots(m-a+2)(m-a)\ldots 3.2.1;$$

und, weil unter den Differenzen

$$a-b,\ a-c,\ .\ .\ .\ a-k,$$

$m-a$ negative vorkommen müssen:

$$(a-b)(a-c)\ .\ .\ .\ (a-k)=$$
$$=1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ (a-1)\ .\ (-1)^{m-a}\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ (m-a).$$

Hiedurch wird

$$B_a=(-1)^{m-a+1}\ .\ \frac{m(m-1)\ .\ .\ .\ (m-a+2)}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ .\ .\ (a-1)}\times$$
$$\times\frac{(m+a-1)(m+a-2)\ .\ .\ .\ (a+1)\,a}{2m\,(2m-1)\ .\ .\ .\ .\ .\ (m+2)(m+1)},$$

folglich, wenn man $a=m-r+1$ setzt, und bedenkt, dafs

$$\frac{m(m-1)\ .\ .\ .\ .\ (r+1)}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ .\ .\ (m-r)}=\frac{m(m-1)\ .\ .\ .\ .\ (m-r+1)}{1\ .\ 2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ r}$$

ist,

$$A_r=(-1)^r\ .\ \frac{m(m-1)(m-2)\ .\ .\ .\ (m-r+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ r}\times$$
$$\times\frac{(2m-r)(2m-r-1)\ .\ .\ .\ (m-r+1)}{2m\quad(2m-1)\quad .\ .\ .\ .\ (m+1)}$$
$$=(-1)^r\ .\ \frac{m(m-1)(m-2)\ .\ .\ .\ (m-r+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ r}\times$$
$$\times\frac{m(m-1)(m-2)\ .\ .\ .\ .\ (m-r+1)}{2m\,(2m-1)(2m-2)\ .\ .\ .\ (2m-r+1)}$$
$$=(-1)^r\ .\ \frac{m^2(m-1)^2(m-2)^2\ .\ .\ .\ (m-r+1)^2}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ r\ .\ 2m\,(2m-1)\ .\ .\ .\ (2m-r+1)}.$$

Die Gleichung $\psi(x)=0$ ist dem zu Folge:

$$x^m-\frac{m^2}{2m}x^{m-1}+\frac{m^2(m-1)^2}{1\ .\ 2\ .\ 2m\,(2m-1)}x^{m-2}$$
$$-\frac{m^2(m-1)^2(m-2)^2}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 2m\,(2m-1)(2m-2)}x^{m-3}+\ .\ .\ .$$
$$.\ .\ .+(-1)^m\ .\ \frac{m\ (m-1)\ (m-2)\ .\ .\ .\ 2\ .\ 1}{2m\,(2m-1)(2m-2)\ .\ .\ .\ (m+2)(m+1)}=0.$$

Gibt man der linken Seite derselben, d. i. dem Ausdrucke $\psi(x)$ die Form

$$\frac{1}{2m(2m-1)\ldots(m+2)(m+1)}\Big[2m(2m-1)\ldots(m+2)(m+1)\,x^m$$
$$-(2m-1)(2m-2)\ldots(m+1)\,m\,.\,\frac{m}{1}\,x^{m-1}$$
$$+(2m-2)(2m-3)\ldots m(m-1)\,.\,\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,x^{m-2}-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^m\,.\,m(m-1)(m-2)\ldots 2\,.\,1\Big],$$

zu welcher die Betrachtung des ersten der oben für A_r erhaltenen Ausdrücke sogleich führt, so zeigt sich

$$\psi(x)=\frac{1}{2m\,(2m-1)\ldots(m+2)\,(m+1)}\,.\,\frac{d^m[x^m(x-1)^m]}{d\,x^m},$$

woraus erhellet, dafs die Gleichung $\psi(x)=0$ die m^{te} der Gleichungen ist, welche aus der Gleichung

$$x^m\,(x-1)^m=0$$

durch successives Differenziren derselben entspringen.

Dieses Resultat, welches wir Hrn. Prof. *Jacobi* verdanken, und wozu der von diesem Analysten betretene Weg direct führt, ertheilt uns über die Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung $\psi(x)=0$ Aufschlufs. Da nämlich sämmtliche $2m$ Wurzeln der Gleichung $x^m(x-1)^m=0$ reell, und zwar m derselben $=0$, die übrigen m aber $=1$ sind, so müssen, wie die Theorie der Gleichungen lehrt, nothwendig sämmtliche m Wurzeln der Gleichung $\psi(x)=0$ reell und unter einander verschieden seyn, und zwischen 0 und 1 liegen. Da ferner die linke Seite der Gleichung $x^m(x-1)^m=0$ in Nichts verändert wird, wenn man $1-x$ an die Stelle von x setzt, so erleidet auch die linke Seite der Gleichung $\psi(x)=0$, aufser dem bei einem ungeraden m eintretenden Zeichenwechsel sämmtlicher Glieder, keine Änderung, wenn man $1-x$ an die Stelle von x bringt. Hieraus folgt, dafs zu jeder Wurzel der Gleichung $\psi(x)=0$, nur die ihr, wenn m ungerade ist, zukom-

mende Wurzel $\frac{1}{2}$ ausgenommen, stets eine zweite gehört, welche erstere zur Einheit ergänzt.

Eine nothwendige Folge hievon ist die Gleichheit der Werthe von R_1 und R_m; von R_2 und R_{m-1}; von R_3 und R_{m-2}; u. s. w.

6.

Setzt man

$$\frac{1}{r+m+1} + \frac{A_1}{r+m} + \frac{A_2}{r+m-1} + \ldots + \frac{A_m}{r+1} = M_r,$$

so ergibt sich, wenn man beiderseits mit

$$(r+1)(r+2)\ldots(r+m)$$

multiplicirt, und bedenkt, daſs dieses Product durch $r+m+1$ getheilt, diejenige Zahl zum Reste läſst, in welche es durch die Substitution $r = -(m+1)$ übergeht, die Gleichung

$$(r+1)(r+2)(r+3)\ldots(r+m)M_r =$$
$$= \frac{(-1)^m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}{r+m+1} + G_0 + G_1 r + G_2 r^2 + \ldots$$
$$\ldots + G_{m-1} r^{m-1},$$

worin G_0, G_1, G_2, ... G_{m-1} Constanten sind, deren Werthe von A_1, A_2, A_3, ... A_m abhängen, und in jedem besonderen Falle auch mittelst der Werthe von M_0, M_1, M_2, ... M_{m-1} bestimmt werden können.

Nimmt man auf beiden Seiten dieser Gleichung die $(m-1)^{te}$ Differenz, indem man r als die Veränderliche betrachtet, und $\Delta r = 1$ setzt, so hat man

$$\Delta^{m-1}\left[(r+1)(r+2)(r+3)\ldots(r+m)M_r\right] =$$
$$= -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}{(r+m+1)(r+m+2)\ldots(r+2m)} + 1.2.3\ldots(m-1)\,G_{m-1}$$

Bei der in 5. getroffenen Wahl der Werthe von A_1, A_2, A_3, ... A_m verschwinden die Ausdrücke M_0, M_1, M_2, ... M_{m-1}; daher ist hiebei auch

$\Delta^{m-1}\left[(r+1)(r+2)(r+3)\ldots(r+m)M_r\right]$ für $r=0$

eine verschwindende Gröſse. Man erhält mit Hülfe dieser Bemerkung sogleich

$$G_{m-1} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m}{(m+1)(m+2) \ldots 2m}.$$

Gibt man nun dem obigen Ausdrucke für

$$(r+1)(r+2) \ldots (r+m)\, M_r$$

durch Reduction desselben auf den Nenner $r+m+1$ und durch Auflösung des Zählers in seine einfachen Factoren die Form

$$(r+1)(r+2) \ldots (r+m)\, M_r =$$
$$= \frac{G_{m-1}(r-H_0)(r-H_1)(r-H_2) \ldots (r-H_{m-1})}{r+m+1},$$

so muſs man, damit M_r für $r = 0, 1, 2, 3, \ldots m-1$ verschwinde, $H_0 = 0$, $H_1 = 1$, $H_2 = 2$, ... $H_{m-1} = m-1$ setzen, mithin ist

$$M_r = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m \,.\, r\,(r-1)(r-2) \ldots (r-m+1)}{(m+1)(m+2) \ldots 2m(r+1)(r+2) \ldots (r+m)(r+m+1)},$$

wodurch die rechte Seite der nach 4. zur successiven Berechnung von L_{2m}, L_{2m+1}, L_{2m+2}, ... zu verwendenden Gleichung vereinfacht wird.

7.

In so ferne die Werthe von $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ dergestalt gewählt worden sind, daſs die Gröſsen L_m, L_{m+1}, L_{m+2}, ... L_{2m-1} verschwinden, wird der Fehler, um welchen das Integral $\int \varphi(x)\, dx$ von dem zu berechnenden $\int F(x)\, dx$ abweicht, durch die Formel

$$\int F(x)\, dx - \int \varphi(x)\, dx =$$
$$= K_{2m} L_{2m} + K_{2m+1} L_{2m+1} + K_{2m+2} L_{2m+2} + \ldots$$
$$\ldots + K_r L_r + \int \big(F_r(x) - \varphi_r(x)\big)\, dx$$

ausgedrückt. Ist nun die Function $F(x)$ so beschaffen, daſs der Ausdruck $\int \big(F_r(x) - \varphi_r(x)\big)\, dx$, wenigstens wenn die für $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ angenommenen Wer-

che zwischen den Integrationsgrenzen liegen, bei dem unendlichen Wachsen des Zeigers r über m hinaus, unendlich abnimmt, so fällt der Betrag der Differenz $\int F(x)\,dx - \int \varphi(x)\,dx$ mittelst jener Werthe von a_1, a_2, a_3, . . . a_m, durch welche L_m, L_{m+1}, L_{m+2}, . . . L_{2m-1} auf Null reducirt werden, nothwendig kleiner aus, als wenn mehrere der genannten Gröfsen, wie es bei *Cotes* Formeln der Fall ist, von der Nulle verschieden sind, und obige Formel stellt durch ihre Anfangsglieder den Werth des Fehlers $\int F(x)\,dx - \int \varphi(x)\,dx$ um so genauer dar, je rascher die Coefficienten K_{2m}, K_{2m+1}, K_{2m+2}, etc. abnehmen. Es läfst sich leicht beweisen, dafs das Integral $\int \left(F_r(x) - \varphi_r(x)\right) dx$ die oben angeführte Eigenschaft besitzt, wenn $F_r(x)$, in so ferne x innerhalb der vorgeschriebenen Integrationsgrenzen sich befindet, bei dem unendlichen Wachsen des Zeigers r unendlich klein wird, oder mit andern Worten, wenn die Reihe $K_0 + K_1 x + K_2 x^2 +$ etc., in welche $F(x)$ entwickelt wurde, bei dem genannten Umfange der Werthe von x, zu einer, mit jeder beliebigen Schärfe zu vollziehenden, näherungsweisen Berechnung dieser Function taugt. In diesem Falle ist also die hier aus einander gesetzte, von *Gaufs* zuerst getroffene, Wahl der Werthe von a_1, a_2, a_3, . . . a_m ein kräftiges Beförderungsmittel der Annäherung des Integrals $\int \varphi(x)\,dx$ an $\int F(x)\,dx$.

VI.

Sturm's Regel zur Bestimmung der Anzahl der zwischen zwei gegebenen Zahlen liegenden Wurzeln einer von wiederholten Wurzeln freien numerischen Gleichung mit einer unbekannten Gröſse; nebst einem Beweise derselben

von

A. v. Ettingshausen.

1.

Wenn es sich um die näherungsweise Berechnung sämmtlicher reeller Wurzeln einer numerischen Gleichung $f(x) = 0$ handelt, worin $f(x)$ eine ganze rationale Function der Unbekannten x vorstellt, und welche, da die Auflösung einer mit wiederholten Wurzeln versehenen Gleichung nach dem bekannten Verfahren leicht auf die Auflösung mehrerer niedrigerer Gleichungen mit durchgehends verschiedenen Wurzeln zurückgeführt werden kann, von wiederholten Wurzeln frei gedacht werden darf: so kömmt es, auf welchem Wege man auch immer den Wurzeln, bis zum vorgeschriebenen Grade der Genauigkeit, sich zu nähern gedenkt, stets darauf an, für jede einzelne derselben zwei Zahlen ausfindig zu machen, zwischen welchen diese Wurzel, und auſser ihr keine andere, enthalten ist. Will man diesen Zweck, wie man es bis jetzt zu thun pflegte, bloſs dadurch erreichen, daſs man auf die Zeichen der Resultate achtet, welche $f(x)$ darbietet, während statt x die Glieder einer arithmetischen Progression, zwischen deren erstem und letztem Gliede sämmtliche reelle Wur-

zeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen, gesetzt werden; so mufs die Differenz der Progression kleiner seyn, als der kleinste Unterschied der mit den zugehörigen Zeichen genommenen Wurzeln. Je geringer die Präcision ist, mit welcher man diesen Unterschied zu schätzen vermag, desto mehr Glieder zählt diese Progression, wodurch die Menge der zu berechnenden Werthe von $f(x)$ in demselben Mafse vergröfsert wird. Die scharfe Beurtheilung des kleinsten Unterschiedes der Wurzeln einer Gleichung erfordert aber nach den bis jetzt hiezu vorgeschlagenen Methoden eine mühsame Rechnung, deren Beschwerlichkeit mit dem Grade der Gleichung wächst, und auch dabei kann die Menge der zu berechnenden Werthe der Function $f(x)$ noch immer sehr grofs bleiben.

Der Grund dieser weitläufigen und beschwerlichen Arbeiten liegt in der Unbestimmtheit des Schlusses, welchen die Beschaffenheit der aus $f(x)$, durch die Substitution zweier reeller Zahlen a und b für x, sich ergebenden Resultate $f(a)$, $f(b)$ auf das Vorhandenseyn und die Anzahl der zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zu machen gestattet. Man kann daher die Angabe einer Regel, nach welcher sich hierüber mit Sicherheit entscheiden läfst, als einen um so gröfsern Gewinn für die Theorie der näherungsweisen Auflösung numerischer Gleichungen betrachten, je leichter diese Regel handzuhaben ist.

Nicht ohne Überraschung habe ich die Vorschrift gelesen, welche im 271. Artikel des 11. Bandes von *Férussac's Bulletin des sciences mathématiques etc* (Juniheft 1829) überschrieben: *Analyse d'un mémoire sur la résolution des équations numériques; par M. Ch. Sturm* mitgetheilt wird, und nehme keinen Anstand, sie sowohl ihrer Einfachheit und Eleganz wegen, als auch, weil

man bisher noch kein Theorem besafs, welches über den angeführten Fragepunct mit gleicher Präcision zu entscheiden vermöchte, für einen der wichtigsten Beiträge zu erklären, die der Theorie der numerischen Gleichungen durch die Bemühungen der Analysten neuerer Zeit zu Theil geworden sind. Ich glaube defshalb im Interesse der Leser dieser Zeitschrift zu handeln, wenn ich Ihnen, obgleich das oben angeführte Mémoire, welches den Gegenstand aus einem umfassenden Gesichtspuncte betrachtet, noch nicht erschienen ist, vorläufig die darin aufgestellte Regel zur Bestimmung der Anzahl der zwischen zwei gegebenen reellen Zahlen liegenden Wurzeln einer Gleichung, sammt dem Beweise, welcher sich mir für dieselbe dargeboten hat, hier vorlege.

2.

Lehrsatz. Es sey $f(x)$ eine ganze rationale Function, welche mit ihrem Differenzialquotienten

$$\frac{d f(x)}{d x} = f_1(x)$$

keinen gemeinschaftlichen von x abhängenden Factor besitzt; ferner seyen $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, . . . ganze rationale Functionen, deren erste von niedrigerer Ordnung ist als $f_1(x)$, deren jede folgende von niedrigerer Ordnung ist als die unmittelbar vorhergehende, und welche den, so weit als möglich fortgesetzten, Gleichungen

$$f(x) = f_1(x) \,.\, Q_1 - f_2(x),$$
$$f_1(x) = f_2(x) \,.\, Q_2 - f_3(x),$$
$$f_2(x) = f_3(x) \,.\, Q_3 - f_4(x),$$

u. s. w.,

worin Q_1, Q_2, Q_3, . . . gleichfalls ganze rationale Functionen der Veränderlichen x vorstellen, Genüge leisten: so wird die Anzahl der zwischen zwei gegebenen reel-

len Zahlen a und b liegenden Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ durch den Unterschied der Mengen von Zeichenabwechslungen angezeigt, welche in den zwei Reihen

$$f(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ f_3(a),\ f_4(a), \ldots .$$
$$f(b),\ f_1(b),\ f_2(b),\ f_3(b),\ f_4(b), \ldots .$$

erscheinen.

Anmerkung. Die Functionen $f_2(x), f_3(x), f_4(x), \ldots$ werden leicht gefunden, wenn man die Reste sucht, welche sich durch das bekannte, bei der Bestimmung des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers zwischen $f(x)$ und $f_1(x)$, oder bei der Verwandlung des Bruches $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ in einen Kettenbruch mit numerischen Zählern und ganzen rationalen Nennern anzuwendende Divisionsverfahren ergeben, und sodann die beiden ersten Reste mit ihren, die zwei darauf folgenden mit entgegengesetzten, die nächsten zwei wieder mit ihren, die darauf folgenden zwei mit entgegengesetzten Zeichen nimmt, u. s. w., oder, wenn man bei dem Divisionsverfahren selbst das Zeichen der Glieder jedes Finalrestes ändert und mit dem so vorbereiteten Reste weiter rechnet. Da zwischen $f(x)$ und $f_1(x)$ kein gemeinschaftlicher von x abhängender Divisor Statt findet, so ist der letzte Rest, auf welchen man hiebei stofst, offenbar eine constante Zahl.

Beweis. 1) Wenn eine ganze rationale Function einer Veränderlichen x, während x von a durch alle Zwischenstufen in b übergeht, ihr Zeichen ändert, so geht dieselbe dabei nothwendig durch den Werth Null. Hieraus folgt, dafs bei dem stufenweisen Übergange der Veränderlichen x von a in b in der Reihe der Functionen

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x), \ldots .$$

keine Änderung des Zeichenstandes vorfallen kann, ohne dafs dabei irgend eine dieser Functionen verschwindet.

2) Da $f(x)$ und $f_1(x)$, mithin auch jede zwei benachbarte der genannten Functionen keinen gemeinschaftlichen von x abhängenden Factor besitzen, so können keine zwei Nachbarglieder in der angeführten Reihe zugleich verschwinden.

3) Aus den Gleichungen $f(x) = f_1(x) \cdot Q_1 - f_2(x)$, $f_1(x) = f_2(x) \cdot Q_2 - f_3(x)$ u. s. w. erhellet, dafs für jenen Werth von x, bei welchem eine der Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, u. s. w. verschwindet, die beiden Glieder der Reihe $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, zwischen welchen sich die verschwindende Function befindet, Werthe annehmen, deren Zeichen entgegengesetzt sind.

4) Wenn eine ganze rationale Function von x für einen bestimmten Werth dieser Veränderlichen, z. B. für $x = c$, nicht verschwindet, so läfst sich die Zahl ω so klein annehmen, dafs die Werthe, welche genannte Function bei dem allmähligen Übergange der Variablen x von $c - \omega$ in $c + \omega$ erhält, stets dasselbe Zeichen an sich tragen. Hieraus folgt, dafs unmittelbar vor dem Verschwinden einer der Functionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, u. s. w. die beiden Glieder der Reihe $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, u. s. w., zwischen welchen die verschwindende Function liegt, Resultate mit entgegengesetzten Zeichen darbieten, und während des Nullwerdens genannter Function mit den Zeichen der Resultate ihrer beiden Nachbarn keine Veränderung vorfällt. Was nun auch immer mit dem Zeichen der durch Null gehenden Function geschehen seyn mag, so kann durch ihr Verschwinden in Bezug auf die Anzahl der in den Resultaten sämmtlicher Functionen vor diesem Ereignisse vorhandenen Zeichenwechsel keine Änderung eintreten.

5) Da die Reihe $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, u. s. w. durch eine von x unabhängige Zahl geschlossen wird, so können also Änderungen in der Anzahl der Zeichenwech-

sel, welche die Resultate der Glieder dieser Reihe während des Überganges der Veränderlichen x von a nach b zeigen, nur durch das Verschwinden der Function $f(x)$ herbeigeführt werden.

6) Entwickelt man $f(c+\omega)$ nach den steigenden Potenzen von ω, so zeigt sich, daſs, wenn $f(c)=o$ ist, wobei $f_1(c)$ von Null verschieden seyn muſs, das Zeichen des Resultates $f(c+\omega)$ für die kleinsten Werthe von ω mit dem Zeichen des Productes $\omega f_1(c)$, mithin auch, der in 4) gemachten Bemerkung zu Folge, mit dem Zeichen des Productes $\omega f_1(c+\omega)$ übereinstimmt, woraus sich die Folgerung ergibt, daſs, in so ferne ω positiv gedacht wird, die Resultate $f(c-\omega)$, $f_1(c-\omega)$ entgegengesetzte, und $f(c+\omega)$, $f_1(c+\omega)$ gleiche Zeichen besitzen. Es wird also, so oft $f(x)$ während des Überganges der Veränderlichen x von a in b verschwindet, in der Reihe der Resultate von $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... falls $a<b$ ist, eine Zeichenabwechslung in eine Zeichenfolge, oder falls $a>b$, eine Zeichenfolge in eine Zeichenabwechslung umgeändert, weſswegen die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $f(a)$, $f_1(a)$, $f_2(a)$, $f_3(a)$, ... sich von der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $f(b)$, $f_1(b)$, $f_2(b)$, $f_3(b)$, ... genau um so viele Einheiten unterscheiden muſs, als reelle Wurzeln der Gleichung $f(x)=o$ zwischen a und b enthalten sind. W. z. b. w.

Zusatz. Von den interessanten Folgesätzen, welche sich aus dem so eben bewiesenen Lehrsatze ableiten lassen, mag hier nur jener angeführt werden, daſs die Anzahl sämmtlicher reeller Wurzeln der Gleichung $f(x)=o$ der Anzahl der Zeichenwechsel gleich ist, um welche die Reihe der höchsten Glieder der Functionen $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... von der Reihe der höchsten Glieder der Functionen $f(-x)$, $f_1(-x)$, $f_2(-x)$,

$f_3(-x)$, . . . übertroffen wird; die Unterschiede der in den höchsten und niedrigsten Gliedern beider Functionenfolgen vorhandenen Mengen der Zeichenwechsel aber auf die Anzahl sämmtlicher der Gleichung $f(x)=0$ entsprechender positiver und negativer reeller Wurzeln hinweisen.

VII.

Neue und verbesserte physikalische Instrumente.

1. Instrument zur Bestimmung der Luftmenge, welche einer Feuerstelle während des Verbrennens zuströmt. Von *F. Frey*.

(Bull. de la soc. indust. de Muhlhausen. N. 9, p. 337)

Dieses Instrument hat viele Ähnlichkeit mit dem *Woltmann*'schen Windflügel. Es besteht aus einer kupfernen Röhre, in welcher sich ein verticales Rad mit schief gestellten Windflügeln befindet, wie man sie oft an den Fenstern angebracht sieht. An der Welle dieses Rades steckt zugleich ein Getriebe mit 5 Stäben, in welches ein horizontales Rad mit 50 Zähnen eingreift, an dessen Axe außerhalb der Röhre sich ein Zeiger befindet, der über einer getheilten Platte spielt. Unter diesem Zeiger, und zwar an derselben Axe, befindet sich ein anderes Getriebe, das ebenfalls 5 Zähne hat, und dieses greift in ein Rad mit 50 Zähnen ein, an dessen Axe ein zweiter Zeiger steckt. Dieser steht auf ähnliche Weise mit einem dritten Rade in Verbindung, das wieder einen Zeiger an seiner Welle hat. Der ganze Apparat besteht demnach aus einem Windflügel und der zum Zählen der Umdrehungen desselben nöthigen Ein-

richtung. Einer der drei genannten Zeiger macht während einer Umdrehung des Flügelrades 10 Umdrehungen, der andere 100, der dritte 1000.

Um dieses Instrument zum genannten Zwecke brauchen zu können, ist vor allem nothwendig, dafs man die Anzahl der Umdrehungen des Flügels kenne, während eine bestimmte Gasmenge an demselben vorbeigeht, wozu nur ein Versuch führt. *Frey* nahm zu diesem Ende eine hölzerne, oben geschlossene, unten offene Kiste, die einen halben Kubikmeter fafste. Am oberen Boden derselben war eine rechtwinkelig gebogene Röhre aus Weifsblech angebracht, an deren horizontalen Arm die Röhre des Luftstrommessers angebracht werden konnte. Diese Kiste wurde wie ein Gasometer über einer oben offenen, mit Wasser gefüllten gröfseren aufgehängt, und mit gröfserer oder kleinerer Geschwindigkeit in dieselbe mittelst einer Kurbelvorrichtung eingesenkt. Die beim Einsenken aus dem Gasometer vertriebene Luft mufste beim Luftstrommesser vorbeigehen, und den Windflügel in Bewegung setzen. Dabei erfuhr man, wie viele Umdrehungen der letztere in einer gewissen Zeit durch die aus dem Gasometer entweichende Luftmenge mache. Die Erfahrung lehrte, dafs bei einer mäfsigen Geschwindigkeit dieselbe Luftmasse auch immer dieselbe Anzahl Umdrehungen zu Wege bringt. Bei einem Apparate, dessen Windrad 34 gerade, unter 45° geneigte Flügel hatte, erfolgten durch 100 Liter Luft 154.8 Umdrehungen, es mochte diese Luftmasse in 3″ oder in jeder längeren Zeit bis auf 30″ ausströmen. An einem anderen Instrumente mit 8 kürzeren, aber breiteren, und um 50° geneigten Flügeln bewirkten 100 Liter Luft 107.686 Umdrehungen. Demnach entsprechen 1000 Umdrehungen des Windflügels beim ersteren Instrumente 645.99 Liter, beim zweiten 928.62 Liter Luft.

Bringt man dieses Instrument am Zugloche eines Windofens an, so erfährt man die einströmende Luftmenge. Wird es am Kamine angebracht, so gibt es die aufsteigende Luft an, und aus beiden meint der Verfasser mit Hülfe einer chemischen Untersuchung der aufsteigenden Luft zur Kenntniſs der verzehrten Sauerstoffmenge zu gelangen.

Als dieser Luftstrommesser an dem Windloche eines Ofens, wo in einem Sandbade eine Evoporation beabsichtiget war, angebracht wurde, machte der Windflügel, gleich nachdem Feuer gemacht war, in 120 M. nahe 55000 Umdrehungen, in den folgenden 150 M. stieg die Zahl der Umdrehungen auf 70000. Nach einer Fünftelstunde, wo alles gehörig durchgewärmt ward, betrug diese Zahl für 1 St. 68300 Umdrehungen.

Da man weiſs, wie viel Holz in einer Stunde verbrennt, und auch die hierzu nöthige Sauerstoffmenge bekannt ist, so kann man aus den Ergebnissen solcher Versuche sehen, ob der Verbrennungsprozeſs vollkommen vor sich gehe oder nicht.

2. Thermometer zu Versuchen über die Veränderlichkeit des Siedpunctes der Flüssigkeiten. Von *Kemp.*

(Edinb. journ. N. 4, p. 262.)

Daſs man zu Versuchen über die Veränderlichkeit des Siedpunctes der Flüssigkeiten sehr empfindlicher Thermometer bedürfe, ist für sich klar, und daſs die gewöhnlichen Instrumente zu solchen Untersuchungen nicht die nöthige Empfindlichkeit besitzen, bedarf eben so wenig eines Beweises. *Kemp* sucht diese Empfindlichkeit durch zwei Mittel zu erhöhen, wovon das erste keineswegs neu ist, denn er versieht ein gewöhnliches Instrument mit engem Rohre nur mit einer gröſseren

Kugel und einem cylindrischen weiten Ansatze. Die zweite von ihm empfohlene Einrichtung verdient hingegen nähere Erwähnung. Sie besteht in einer Abänderung des *Leslie*'schen Differenzialthermometers. Die beiden Kugeln *A* und *B* befinden sich nicht, wie bei der gewöhnlichen Einrichtung dieses Instrumentes, an der geraden Thermometerröhre, sondern diese ist zwei Mal rechtwinkelig, und zwar zuerst horizontal, dann abwärts gebogen; ferner reicht die Röhre fast bis auf den Boden der Kugel *A*, und ist stets in die gefärbte Schwefelsäure getaucht, welche einen Theil des inneren Raumes dieser Kngel einnimmt, während sie in der Kugel *B* heberförmig aufwärts gebogen ist.

Will man mit diesem Instrumente z. B. einen Versuch über den Einfluſs der Natur des Gefäſses auf den Siedpunct des Wassers machen, so wird jede der zwei Kugeln dieses Instrumentes in ein Gefäſs mit siedendem Wasser getaucht. Hat dieses in beiden Gefäſsen einerlei Temperatur, so wird man an der flüssigen Säule keine Bewegung wahrnehmen; findet aber ein Temperaturunterschied Statt, so wird sich derselbe aus der Bewegung der Flüssigkeit der Gröſse nach abnehmen lassen.

VIII.

Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. Optik.

1. Über die Gesichtsweite. Von *Lehot*.

(Bull. des sc. math et phys. Nov, 1829, p. 417.)

Lehot construirte ein Instrument, mit welchem er einige interessante Versuche über die Sehweite ver-

schiedener Augen anstellte. Dieses Instrument beruht auf der Gestalt, unter welcher eine fast mit der Augenaxe parallele Linie erscheint; es hat viele Ähnlichkeit mit demjenigen, welches *Young* angegeben hat, und wovon im dritten Bande, S. 457 dieser Zeitschrift die Rede war, und hat im Grunde dasselbe optische Fundament, wird aber von *Lehot* demselben aus Gründen vorgezogen. Es besteht aus einem Lineale, das mit schwarzem Sammt überzogen ist, auf dem sich der Länge nach ein weifser Seidenfaden befindet. Sieht man längs des Lineals durch eine kreisrunde kleine Öffnung auf den Seidenfaden, so erscheint jener Theil, der innerhalb der Sehweite liegt, doppelt, und beide Bilder sind desto weiter von einander entfernt, je weiter der betreffende Punct von der deutlichen Sehweite absteht. Von da an, wo beide Bilder zusammenfallen, und wohin *Lehot* die *erste Grenze* der Sehweite versetzt, sehen ihn einige Personen einfach und rein, in einiger Entfernung von dieser Stelle wird er wieder doppelt, und der Scheitel dieses Winkels ist dem des vorigen zugewendet, aus einem leicht begreiflichen Grunde. Da, wo der zweite Scheitel liegt, befindet sich die *zweite Grenze* der Sehweite.

Die Resultate, welche *Lehot* mit diesem Instrumente erhielt, und um die es sich eigentlich handelt, sind folgende:

Ein biconvexes oder planconvexes Glas, das sich zwischen dem Auge und dem Objecte befindet, bringt die beiden Grenzen der Sehweite einander näher, und zwar desto mehr, je kürzer die Brennweite der Linse ist. So z. B. war für ein Auge ohne Glas

die erste Grenze der Sehweite =	27.5	Centimeter,
» zweite » » »	33	»
mithin der Spielraum	5.5	»

wurde aber eine Linse von 45 Centim. Brennweite gebraucht, so fiel die erste Grenze der Sehweite auf 22.1 C.,

» zweite » » » » 25.7 »

mithin der Spielraum . . . . 3.6 »

mit einer Linse von 22 C. Brennweite betrug

die erste Grenze der Sehweite 9.9 C.,

» zweite » » » 13.1 »

der Spielraum . . . . . . 3.2 »

Die Grenzen der Sehweite liegen dem Auge um so näher, und der Spielraum derselben ist desto kleiner, je brechbarer das Licht ist, welches vom Objecte ins Auge gelangt.

Eine beiderseits concave Linse, zwischen das Object und das Auge gestellt, entfernt die Grenzen der Sehweite von einander, und dasselbe leistet auch ein Mittel, welches dichter als die Luft, und mit parallelen Wänden begrenzt ist.

Es gibt Personen, deren zweite Grenze der Sehweite nur 2 Z. beträgt, andere, bei denen sie in einer unbestimmbaren Entfernung liegt. Im Allgemeinen sind diese Grenzen für jedes der zwei Augen einer Person anders. Bei einer derselben lag für das linke Auge die erste Grenze in 51^c, die zweite in $57^c.5$, während für das rechte diese zwei Grenzen 32^c und $37^c.7$ waren.

Diese Grenzen ändern sich mit den Jahren, und zwar entfernt sich die erstere von dem Auge. Der gewöhnliche Gebrauch der Augen und das Tragen von Brillen modificirt diese Grenzen ebenfalls.

Eine Erweiterung der Pupille entfernt die erste Grenze und nähert die zweite, vermindert also den Abstand derselben von einander; eine Verengung der Pupille bringt eine entgegengesetzte Wirkung hervor. Einige Menschen scheinen nach Belieben die Grenzen der

Sehweite ändern zu können. Ein Druck mit dem Finger auf das Auge verschiebt diese Grenzen ebenfalls.

Von einem Objecte, das sich aufserhalb des Spielraums der deutlichen Sehweite befindet, erhält man nur ein undeutliches Bild. Diese Undeutlichkeit ist desto gröfser, je kleiner das Object ist, falls die Entfernung desselben ungeändert bleibt; sie kann so weit gehen, dafs das Object ganz verschwindet, welches nach *T. Mayer* mit einem schwarzen auf weifsem Grunde verzeichneten Kreise, den man im Schatten ansieht, bei einem Sehwinkel von nahe 34″ erfolgt.

Für ein Auge, dessen zweite Grenze der Sehweite weiter vom Auge entfernt ist, verschwindet das Bild eines solchen Objectes auch früher, als für ein solches, dessen zweite Grenze demselben näher liegt. Mittelst eines durchstochenen Blattes kann man die Entfernung, bei welcher das Verschwinden eintritt, vergröfsern. Beim Gebrauche eines convexen Glases tritt jenes Verschwinden bei einer geringeren Entfernung ein, als mit freiem Auge, beim Gebrauche eines concaven Glases hingegen in einer gröfseren Entfernung.

Befindet sich das Object diesseits der ersten Grenze der Sehweite, so findet nahe dasselbe Statt, wie vorhin gesagt wurde.

Aus diesen Gründen meint *Lehot*, dafs uns Gegenstände nicht wegen zu kleinem Gesichtswinkel verschwinden, sondern wegen zu grofser Undeutlichkeit, etwa so, wie die Bilder auf der Wand eines Zimmers, wohin das Licht durch Fenster gelangt, und welche den Gegenständen angehören, die das Licht ins Zimmer senden, wegen zu grofser Undeutlichkeit nicht wahrnehmbar sind.

Diese Bemerkungen benützt *Lehot*, um für ein kurz- oder weitsichtiges Auge die passende Brille zu wählen.

Es gibt für jedes Object, das sich in einer bestimmten Entfernung ausserhalb der Grenzen der Sehweite befindet, eine Linse, welche diese Grenzen und ihre gegenseitige Entfernung so abändert, dafs das Bild am reinsten an der Grenze der Sehweite erscheint. Convexe Linsen ermüden die Augen darum so sehr, weil sie den Abstand der beiden Grenzen der Sehweite vermindern.

2. Der erste Erfinder des achromatischen Teleskopes.

In dem schätzbaren *Annuaire présenté au Roi par le bureau des longitudes* findet sich seit mehreren Jahren die Angabe in der chronologischen Aufzählung der ursprünglichen Erfindung astronomischer Instrumente, dafs das erste achromatische Teleskop 1750 von Hrn. *Hall* vollendet, und erst acht Jahre später, im Jahr 1758, die Entdeckung achromatischer Teleskope von Hrn. *Dollond* (dem Vater) bekannt gemacht worden sey. Wenige englische Schriftsteller über Optik erwähnen nur des Namens *Hall*, und sein Verdienst als erster Erfinder des achromatischen Teleskopes scheint in dem Lande selbst, wo diese wichtige Entdeckung zuerst gemacht worden ist, beinahe ganz unbekannt. Nur beiläufig wird in einer Note, in Dr. *Young's* Vorlesungen über Optik, dieser Entdeckung erwähnt, und auf das Novemberheft 1798 des *Philosophical Journal* (*Gentleman's* Magazin, Oct. 1790) verwiesen. Daselbst findet sich nun zwar eine umständlichere Nachricht über Hrn. *Hall's* Teleskope, aber auch nur in einer sehr kurzen Note, die aber durch den Umstand wichtig wird, dafs der verstorbene berühmte *Ramsden* die Wahrheit der darin angeführten Thatsachen über die Entdeckung bezeuget.

Die Aufmerksamkeit aller Astronomen lenkt sich

nunmehr auf die Verbesserungen, welche von Optikern auf dem Continente in den achromatischen Objectivgläsern gemacht worden sind, welche nunmehr in hinreichender Vollkommenheit mit Öffnungen alle, die jemals aus englischem Glase gemacht worden sind, so weit übertreffen, daſs dadurch der Gebrauch von reflectirenden Teleskopen wohl ganz beseitiget werden wird, indem die Spiegel, das leichte Anlaufen derselben abgerechnet, bei groſsen Dimensionen über zwei Fuſs im Durchmesser, die genaue Gestalt der Oberfläche durch ihr eigenes Gewicht verlieren. Die in dem erwähnten Journale enthaltenen Thatsachen sind folgende:

» *Der erste Erfinder des achromatischen Teleskopes war Hr. Chester More Hall Esqu. von More Hall in Essex.* «

Aus seinen Schriften erhellet, daſs er seine Arbeiten schon im Jahre 1729 angefangen, und nach vielen Versuchen endlich so glücklich war, zwei Sorten von Glas zu finden, welche das erforderliche Zerstreuungsvermögen für die Lichtstrahlen in entgegengesetzten Richtungen hatten, um, zu Linsen zusammengesetzt, die Objecte farbenlos zu zeigen.

» Ungefähr im Jahre 1733 vollendete er mehrere achromatische Objective (obgleich er sie noch nicht mit diesem Namen belegte), die eine Öffnung von 2 $^1/_2$ Zoll im Durchmesser hatten, wiewohl ihre Brennweite nicht über 20 Zoll ging. Eines derselben ist noch gegenwärtig im Besitze des wohlehrwürdigen Hrn. *Smith* in Charlotte-street, Rathbone place (in London), von mehreren ausgezeichneten Kunstverständigen untersucht, und darin alle jene Eigenschaften gefunden worden, die unsere neuern achromatischen Linsen besitzen. Hr. *Hall* verwendete mehrere arbeitende Optiker, um seine Gläser zu schleifen, denen er die Radien der Oberfläche

angab, die erforderlich waren, nicht nur das verschiedene Brechungsvermögen für die Lichtstrahlen, sondern auch die von der sphärischen Gestalt der Linsen herrührenden Abweichungen auszugleichen. Einer dieser Arbeiter, durch die Hr. *Hall* seine Erfindung ausführen liefs, war Hr. *Bass* der ältere, welcher zu seiner Zeit in der Gegend von Bridewell lebte.«

»In dem Rechtsstreit, der in Westminsterhall wegen des Patents auf achromatische Teleskope geführt worden, wurde Hr. *Hall* zwar unbedingt als erster Erfinder erklärt, aber Lord *Mansfield* bemerkte: dafs der durch ein Patent zu erlangende Gewinn von einer neuen Erfindung nicht Demjenigen gebühre, der seine Erfindung im Schreibpulte verschlossen behält, sondern Jenem, der sie zum Nutzen seiner Mitbürger zuerst verbreitet. Dieser Ausspruch war vielleicht um so gerechter, als Hr. *Hall* ein sehr wohlhabender Grundbesitzer war, und gar keinen Geldgewinn von seiner Erfindung suchte Dafs Hr. *Ayscough*, Optiker in Ludgate-Hill, schon 1754 ein Teleskop von Hrn. *Hall* besafs, ist auch eine unläugbare Thatsache.«

Im Winter 1789 erinnert sich Freiherr v. *Jacquin* einer Sitzung der k. Londoner Societät beigewohnt zu haben, worin Hr. *Ramsden* und Hr. *Dollond* der Sohn, in heftigen Streit über diese Angelegenheit geriethen.

3. Neue Beugungsphänomene. Von *Herschel*.

Herr *Herschel* hat den Artikel über Optik in der *Encyclopaedia metropolitana*, die leider ins Stocken gerathen seyn soll, bearbeitet, und in demselben nebst einer vortrefflichen Darstellung des bereits über das Licht Bekannten, manches Neue dargestellt. Aus dieser Arbeit ist das Folgende über die Beugung des Lichtes entlehnt.

Wenn wir einen glänzenden Stern durch ein sehr gutes Teleskop, welches nicht sehr vergröſsert, ansehen, so erscheint uns derselbe als eine condensirte glänzende Masse Licht, deren Gestalt des Glanzes wegen unmöglich unterschieden werden kann, und welche, sey auch das Teleskop noch so gut, selten von kleinen strahligen Anhängen oder Fransen frei ist. Gebrauchen wir aber ein Teleskop von 200- bis 300- oder 400maliger Vergröſserung, so erscheint uns der Stern unter günstigen Umständen, dergleichen ruhige Luft, gleichförmige Temperatur etc. sind, vollkommen rund, und wie eine gut begränzte planetarische Scheibe, die abwechselnd mit zwei, drei oder mehreren dunklen und glänzenden Ringen umgeben ist, welche bei aufmerksamer Betrachtung an ihren Rändern etwas gefärbt erscheinen, sich fast in gleichen Zwischenräumen concentrisch auf einander folgen, und gewöhnlich viel besser, regelmäſsiger und gebildeter durch Refractoren als durch Reflectoren gesehen werden. Auch ist die Centralscheibe durch die erstern viel gröſser als durch die letztern zu sehen.

Diese Scheiben wurden zuerst von *Wilhelm Herschel* (dem Vater) entdeckt, welcher, um sie sichtbar zu machen, sich sehr stark vergröſsernder Teleskope bediente. Sie sind nicht die wirklichen Sternkörper, welche zu weit entfernt sind, um sie je durch Vergröſserungen, die wir erzwecken können, sichtbar zu machen, sondern unterschobene oder unreelle Bilder, die aus optischen Ursachen entstehen, welche bisher bis auf einen gewissen Grad immer dunkel blieben. Es ist in der That Jedem klar, der mit den Gesetzen der Interferenz und der Bildung der Brennpuncte nach dem Undulationssysteme vertraut ist (das Objectivglas genau aplanatisch vorausgesetzt), daſs der Brennpunct in der

Axe durch die in vollkommener Übereinstimmung zusammentreffenden Undulationen bewirkt werde, und natürlicher Weise intensiv leuchtend erscheinen müsse; und daſs, sobald wir von dem Focus in einer Richtung, die mit der Axe einen rechten Winkel macht, abgehen, diese Übereinstimmung nicht mehr Statt finde, sondern die Strahlen, die von einer Seite des Objectivglases kommen, anfangen, sich mit jenen zu interferiren, die von der andern Seite herkommen, so daſs in einer gewissen Entfernung von der Axe eine totale Opposition eintritt, und ein dunkler (kreisförmiger) Ring entstehet, auf welchen aus derselben Ursache ein heller folget, und so weiter. Auf diese Art wird die Entstehung der Centralscheibe und des Ringes einleuchtend, obwohl die Berechnung ihrer Gröſse aus dem Gegebenen schwierig seyn mag. Aber dieses belehret uns nicht über eine der merkwürdigsten Eigenheiten dieser Erscheinung, nämlich daſs die scheinbare Gröſse der Scheibe für verschiedene Sterne verschieden, und je heller der Stern, desto gröſser ist. Dieſs kann keine bloſse Täuschung seyn, indem, wenn zwei ungleich glänzende Sterne zu gleicher Zeit beobachtet werden, wie dieſs z. B. bei sich nahen Doppelsternen direct geschehen kann, sich eine auffallende Ungleichheit in den Durchmessern ihrer unreellen Bilder ergibt; noch kann dieses in einem wirklichen Unterschiede der Sterne selbst liegen, da bei dem Dazwischentreten einer Wolke, welche ihre Helle verdunkelt, auch ihre scheinbaren Scheiben zu blossen Puncten reducirt werden; noch kann es einer Irradiation oder Fortpflanzung des Eindruckes vom Puncte der Netzhaut an in die Entfernung seyn, weil in diesem Falle das Licht der Centralscheibe sich den Kreisen nähern, und sie vertilgen würde, es sey denn, daſs wir in der That eine Schwingung der Retina voraussetzen,

welche nach denselben Gesetzen wie jene des Äthers erzeugt, und der Interferenz fähig wäre, in welchem Falle die Scheibe und die Kreise auf der Retina das Resultat der Interferenz beider Undulationen seyn würden.

Ohne noch weiter in diesen wahrhaft zarten Gegenstand einzudringen, werden wir uns begnügen, einige unserer Beobachtungen, welche durch Blendungen oder Öffnungen von verschiedener Form, die an Objectivgläsern applicirt waren, hervorgebracht worden sind, anzuführen, und welche keine unwichtige Ergänzung zu den (schönen) *Fraunhofer*'schen Beobachtungen über den Effect sehr kleiner Öffnungen, mit denen sie einiger Maſsen verwandt sind, liefern.

Wurde die ganze Öffnung des Teleskops durch eine kreisrunde Blendung begrenzt, welche entweder dem Objectivglase nahe oder in einiger Entfernung von demselben applicirt war, so stand die Vergröſserung der Scheibe und der Kreise mit den Öffnungsdurchmessern in einem verkehrten Verhältnisse. Wurde die Öffnung sehr klein (als für ein Teleskop von 7 Fuſs Focallänge bis auf einen Zoll reducirt), so vergröſserte sich die unreelle Scheibe bis zur planetarischen Gestalt, in welcher sie wohl begrenzt und nur mit einem Ringe umgeben erschien, der lebhaft genug war, um deutlich gesehen zu werden, und schwach gefärbt, Die Farben folgten in folgender Ordnung von dem Mittelpuncte der Scheibe an gerechnet auf einander: Weiſs, sehr schwach roth, schwarz, sehr schwach blau, weiſs, äuſserst schwach roth, schwarz. Wurde die Öffnung noch weiter, z. B. bis auf einen halben Zoll verkleinert, so wurden die Kreise zu schwach, um noch weiter gesehen werden zu können, und die Scheibe sehr vergröſsert. Die Abstufung des Lichtes vom Centrum an bis an den Um-

fang war nun sehr merklich, so daſs es eine nebelige und cometische Gestalt erzeugte.

Bei ringförmigen Öffnungen war die Erscheinung auſserordentlich auffallend, und sehr regelmäſsig. Hatte der äuſsere Durchmesser des Ringes 3 Zoll, und der innere 1 1/4 Zoll, so sah man die Capella, wie Fig. 30 zeigt, und den Doppelstern Castor, wie Fig. 31 darstellt. Wird die Breite der ringförmigen Öffnung vermindert, so vermindert sich auch die Gröſse der Scheibe und die Breite der Kreise. (Im Gegensatze mit dem, was in den *Fraunhofer*'schen Experimenten mit auſserordentlich engen ringförmigen Öffnungen Statt gefunden hat. Offenbar beruhen die gegenwärtigen Erscheinungen auf anderen Grundgesetzen.) Zu gleicher Zeit vermehret sich die Anzahl der sichtbaren Ringe. Die Figuren 32, 33 und 34 stellen dar, wie die Capella erscheint bei ringförmigen Öffnungen von 5,5 — 5 Zollen (nämlich bei solchen, deren äuſserer Durchmesser 5,5, und innerer 5 Zolle miſst), von 0,7 — 0,5″, und von 2,2 — 2 Zollen.

Bei dieser letzten Erscheinung reducirte sich die Scheibe auf einen kaum bemerkbaren runden Punct, und die Kreise befanden sich so nahe an einander, daſs sie kaum gezählt werden konnten. Wurde die Breite der ringförmigen Öffnung noch ferner bis zur Hälfte verkleinert, so konnten die Zwischenräume zwischen den Kreisen nicht länger mehr unterschieden werden. Die Ausmessungen dieser Kreise und der Scheibe scheinen allgemein mit $\frac{r'-r}{r}$ im Verhältnisse zu stehen, wo r', r die Halbmesser der ringförmigen Öffnung bedeuten.

Auſser den nahe der Scheibe gelegenen Kreisen werden mit ringförmigen Öffnungen noch andere von viel gröſserem Durchmesser und schwächerem Lichte

wie Höfe gesehen, die nach *Fraunhofer's* Sprache zu den Spectris einer verschiedenen Classe gehören. Bei einer einzigen ringförmigen Öffnung sind sie zu schwach, um genau untersucht werden zu können. Bei einer aus zwei solchen Ringen zusammengesetzten Öffnung sind sie klar und leuchtend; die Erscheinung ist in Fig. 35 vorgestellt, in welcher das Licht durch Schattirung, und die Dunkelheit durch die Helle dargestellt ist.

Bei einer Öffnung in Gestalt eines gleichseitigen Dreieckes ist die Erscheinung äufserst schön; sie bestehet in einem vollkommenen regelmäfsigen, glänzend sechsstrahligem Stern, den eine wohlbegrenzte runde helle Scheibe umgibt. Die Strahlen vereinigen sich nicht mit der Scheibe, sondern sind von derselben durch einen schwarzen Kreis abgesondert, auch sind sie sehr enge beisammen, vollkommen gerade, und zeichnen sich besonders durch eine totale Aufhebung des zerstreuten Lichtes aus, welches das Feld erfüllen würde, wenn keine Blendungen gebraucht würden. Diese merkwürdige Erscheinung ist in Fig. 36 dargestellt.

Das nämliche Resultat erhält man auch, wenn die Öffnung statt eines gleichseitigen Dreieckes, die Differenz zweier gleichseitigen concentrischen, auf ähnliche Art gestellten Dreiecke ist. Da ein Dreieck nur drei Seiten und drei Winkel hat, so erscheint die Hervorbringung eines sechsstrahligen Sternes sonderbar. Da diese vermuthen läfst, dafs drei Strahlen von den Winkeln, und drei von den Seiten entstehen, so sollte man erwarten, dafs irgend ein bemerkbarer Unterschied in den abwechselnden Strahlen existiren sollte, welcher ihren verschiedenen Ursprung bezeichnet; doch sind, wenn das Ocular im vollkommenen Focus ist, alle Strahlen sich gleich; ist dasselbe aber aus den Focus gezogen, so wird der Unterschied ihres Ursprungs sicht-

bar; Fig. 37 stellt das Bild dieser letzten Erscheinung dar; in dieser erscheinen abwechselnd die drei ersten der strahligen Arme als aus ihrer Länge parallelen Fransen bestehende Reihen, die drei andern als aus kleinen Bögen von ähnlichen Fransen bestehend, deren Enden an den Scheiteln der Hyperbeln, zu welchen sie gehören, unmittelbar anliegen, und welche folglich die Strahlenarme in einer zu ihrer Länge perpendiculären Richtung durchkreuzen.

Wird das Teleskop besser in den Focus gestellt, so nähern sich die Hyperbeln ihren Assymptoten, vermischen sich mit denselben in einer nicht zu unterscheidenden Nähe, und so entstehen drei aus stetigen Lichtlinien zusammengesetzte Strahlen, und unmittelbar drei andere Strahlen, die aus einer unendlichen Anzahl von abgesonderten, nahe an einander gestellten Puncten hervorgehen.

Um analytisch die Intensität des Lichtes in diesen unstetigen Strahlen darzustellen, wird die Anwendung von Functionen einer besondern Natur, und eine sehr zarte Behandlung erfordert. Die eben beschriebene Erscheinung gibt in besondern Fällen ein vollkommenes Mikrometer ab, dienlich zu astronomischem Gebrauche. Wird die Blendung gedreht, so drehen sich die Strahlen mit ihr, und hat ein heller Stern, als *α Aquilae*, in seiner Nähe einen kleinen, so kann die Blendung so gestellt werden, daſs einer der sechs Strahlen durch den kleinen Stern geht, welcher sodann wie eine Perle an einem Bande verweilt, und gemächlich beobachtet werden kann. Läſst sich hierbei auch die Lage an einer wohl angebrachten Gradabtheilung ablesen, so gibt sich dadurch auch die relative Lage der zwei Sterne zu erkennen. Hiervon hat *Herschel* selbst zur eigenen Zufriedenheit die Anwendung gemacht, und

dieser Kunstgriff mag in vielen Fällen, die bei ihrem ersten Anblicke uns beträchtliche Schwierigkeiten darzubieten scheinen, nützlich seyn.

Werden drei runde Öffnungen, welche ihre Mittelpuncte in den Winkeln eines gleichseitigen Dreieckes haben, angewendet, so bestehet das Bild ein Mal aus einer hellen runden Scheibe, dann aus sechs schwächern Scheiben, welche mit der erstern in Berührung stehen, und aus einem System von sehr schwachen Höfen, die, wie in Fig. 38, als Kreise das Ganze umgeben. Werden jedoch drei gleiche ringförmige Öffnungen eben so gestellt, so zeigt sich die Erscheinung im Focus, wie in Fig. 30, mithin eben so, als wenn zwei dieser Öffnungen geschlossen wären. Doch aufser dem Focus gibt sich der Unterschied zu erkennen, und zwar ist für diesen Fall die Erscheinung in Fig. 39 dargestellt, wo jede der Öffnungen ihre eigene Centralscheibe und ein System von Kreisen hervorbringt, deren Durchschnitte dem Systeme den in selber dargestellten Fransen die Entstehung geben. Wird das Teleskop besser in den Focus gestellt, so verschwinden diese wieder, und die Erscheinung ist wie Fig. 40. Die Mittelpuncte nähern sich stufenweise, die Kreise vereinigen sich, bis endlich der Punct des vollkommenen Übereinandertreffens erreicht ist.

Eine Öffnung in Gestalt des Unterschiedes zweier Quadrate bringt nicht einen acht-, sondern vierstrahligen Stern hervor; die Strahlen sind aber nicht wie bei einer triangulären Öffnung ununterbrochene feine Linien, die vom Centrum an bis an die Extremitäten immer schmäler zulaufen, sondern sie sind aus abwechselnd dunklen und lichten Theilen zusammengesetzt. Die Theile, welche der runden Centralscheibe am nächsten liegen, sind aus auf die Richtung der Radien transver-

salen Streifen zusammengesetzt, und mit den prismatischen Farben gefärbt. Ähnliche Streifen befinden sich auch ohne Zweifel in den entfernten, sich auf eine grofse Weite erstreckenden Theilen.

Eine Öffnung, welche aus 50 Quadraten von ungefähr $^1/_2$ Zoll Seite bestand, und die so gestellet waren, dafs sie zwischen ihnen nach den Richtungen der beiden Seiten gleiche Zwischenräume liefsen, brachten ein Bild hervor, welches ganz von jenem von *Fraunhofer* beschriebenen, wenn zwei sehr feine gleiche Gitter kreuzweise über einander gelegt werden, verschieden ist, obwohl die Eintheilung und Figur der Öffnungen in beiden Fällen dieselben sind. Diese Erscheinung ist, wie sie Fig. 41 darstellet, eine weifse runde Centralscheibe von 8 lebhaften Spectris umgeben, die nach dem Umfange eines Viereckes gestellet sind; aufser diesem erstrecken sich in derselben Figur in Gestalt eines Kreuzes dreifache Reihen von sehr schwachen Spectris auf eine grofse Weite hinweg.

Bestand die Öffnung aus sehr vielen gleichseitigen Dreiecken, welche so wie in Fig. 42 gestellt sind, so ergab sich die sehr überraschende Erscheinung. Diese bestand nämlich aus einer Reihe von runden Scheiben, welche von der Centralscheibe an in sechsstrahlige divergirende Streifen geordnet, und von denen jede mit einem Ringe umgeben waren; die Centralscheibe war hell und etwas gefärbt, die übrigen immer mehr und mehr gefärbt, und nach Verhältnifs ihrer Entfernung vom Centrum in Spectra verlängert. Diese sind nur wenige von den neuern und schönen Erscheinungen, welche von der Form der Öffnungen in Teleskopen abhängen, und die uns ein weites Feld zu fernern Untersuchungen darbieten, wenigstens eines,

welches sowohl den Künstler als den theoretischen Forscher interessiren mufs.

B. Allgemeine Physik.

1. Über artesische Salz-Soolen und Gasbrunnen in China.

(Mitgetheilt von Dr. *Johann Lhotsky.*)

Wenn aus nachfolgendem Berichte die grofse Verbreitung artesischer Brunnen in China hervorgeht, so wird Dieses vielleicht auch ein näheres Licht über die Geschichte ihrer Einführung in Europa, verbreiten. Denn es ist bekannt, dafs diese Art der Brunnengräberei zuerst im Jahre 1671 von *Dominicus Cassini* in Frankreich angeregt wurde [1]). Da dieses nun auch jene Epoche ist, wo durch *Ludwig des XIV.* Unterstützung, die Verbindung jenes Landes mit China durch Missionen, und ihre Berichte vorzüglich lebhaft war, so könnte es wohl seyn, dafs vorgenanntem grofsen Mathematiker diese Idee durch einen Anklang von dorther suggerirt worden wäre. Doch blieb es erst der neuesten Zeit vorbehalten, diese so glückliche Idee vollständig ins Leben einzuführen, denn vor wenig Jahren war man selbst in Frankreich noch der Meinung, dafs nur die Gegend um Arras in der ehemaligen Provinz Artois (woher sie auch ihren Namen haben) zur Bohrung der artesischen Brunnen geeignet sey [2]). Wenn nun aus nachfolgendem Be-

---

[1]) *Recueil industriel. Paris* 1827.

[2]) *Quelquefois ces nappes (d'eau) s'établissent sur un lit de roche, même entre deux lits de roche; et dans ce dernier cas il peut arriver que, descendant d'un lieu beaucoup plus élevé, et se trouvant remplir complétement l'intervalle des roches, il ne faille que percer le*

richte hervorgehen wird, dafs diese in China in grofser Menge bestehen, so kömmt noch dazu, dafs sie dort zur Gewinnung von Salzsoole im Gebrauch sind, und zu einer Tiefe ausgehöhlt seyn sollen, die bisher bei uns nicht wohl erreicht wurde. Und wenn es endlich ein (in der neuern Zeit) häufiger beachtetes Factum ist, dafs in der Nähe von Salzquellen auch verschiedene Gasarten (namentlich kohlensaures und Schwefelwasserstoff-) hervorbrechen [3]), so sehen wir in China auch diese letztere Luftart, und zwar auf eine ausgedehnte und erstaunungswürdige Art benützt.

Schon im zweiten Bande der *lettres édifiantes* befand sich ein, obgleich sehr kurzer, Bericht des Bischofs von Tabraka, wo er dieser chinesischen Salzbrunnen erwähnt. Weit ausgedehnter ist die Beschreibung, die Hr. *Imbert, missionaire apostolique*, von diesen Brunnen gibt, und wir glauben in ihr keine Anzeichen einer Unwahrheit zu

---

roche supérieure pour le faire sortir en jaillissant et arriver jusqu'à la surface du sol. C'est parceque la plaine d'Arras a une telle disposition de roches, qu'on peut y creuser ces puits si célèbres, appellés puits artésien. Encyclop. method. Paris 1816. *Agriculture. Vol. VI. p.* 75.

3) In der Szlatinaer Steinsalzgrube zu Nagy-Banya in Siebenbürgen, quillt seit dem Jahre 1826 aus einer Spalte des in Steinsalz eingelagerten Thonmergels, in einer Tiefe von 45°, ein brennbares Gas hervor, und wird zum Beleuchten der Verhaue benützt. » Hrn. Apotheker *Bremer's* Bericht in *Poggendorff's* Annalen der Physik, 1826, p. 131 etc. « — Ähnliche Erscheinungen wurden schon früher in Ungarn beobachtet. Die wichtigste endlich dieser Art existirt in der Saline Gottesgabe in der Grafschaft Teklenburg, wo die Gasausströmung alle fünf Minuten einen Kubikfufs beträgt, und gleichfalls zur Beleuchtung benützt wird. *Vide l. cit.* » die Anmerkungen der Redaction.«

finden. Vorgenannter Hr. *Imbert* meldet in einem Briefe vom Sept. 1826 aus der Stadt Ou-Tong-Kiao bei Kiating in der Provinz Su-Tchuen Folgendes [4]):

» Handel und Betriebsamkeit versammeln hier eine Unzahl von Menschen aus allen Theilen des Reiches. In einer Länge von 10, und einer Breite von 4—5 Stunden findet man einige *Zehntausend* dieser Salzbrunnen. Jeder etwas wohlhabende Mann verbindet sich mit irgend einem andern, und gräbt einen oder mehrere Brunnen, wovon einer ungefähr Tausend und einige Hundert Taëls (zu 7 ½ Franken) kostet. Diese Nation macht alles im Kleinen, und gelangt mit Zeit, Geduld und weniger Kosten als wir zu ihrem Zwecke. Sie kennen die Kunst, Felsen durch Minen zu sprengen, nicht, und doch sind diese Brunnen in Felsen. Sie haben 1000, 1800, ja manchmal 2000 französische Fuſs Tiefe [5]), und nicht mehr als 5″, höchstens 6″ Öffnung. Sie verfahren dabei folgender Maſsen: Wenn die Oberfläche aus 3—4′ tiefer Erde besteht, so bringt man eine Röhre von Holz hinein, über welche ein Quaderstein kömmt, der die gewünschte Öffnung von 5—6″ hat; in der Röhre läſst man eine Ramme oder Keule von Stahl, von 300—400 Pf. Schwere

---

[4]) *Annales de l'association de la propagation de Foi. Paris. Janv.* 1829, *p.* 369 *etc.;* eine Zeitschrift, die in Hinsicht ihrer geographischen und physikalischen Notizen bisher wenig beachtet worden ist.

[5]) Dieſs wäre eine viel gröſsere Teufe, als man bei uns durch den Bergbau erreicht hat. » *Agricola rapporte dans son Bermanus, que les puits de mine les plus profonds sont à Kuttenberg en Bohême et qu'ils ont* 500 *Lachter (environ* 1000 *Mètres).* « *Traité de Géognosie par M. d'Aubuisson de Voisins. Paris* 1828. *Vol. I., p.* 386.« Alle Beispiele, die der Verfasser aus Tirol, Sachsen, England etc. anführt, geben alle eine geringere Teufe.

spielen. Diese Ramme ist ringsum eingekerbt, oben etwas concav, unten rund. Ein starker, leicht gekleideter Mann steigt auf ein Gerüste, und tanzt den ganzen Morgen auf einem Schnellbalken, welcher diese Stahlramme auf 2′ Höhe erhebt, und sie dann von ihrer eigenen Schwere wieder fallen läfst. Man giefst manchmal einige Schaff Wasser in das Loch, um das Steinmehl zu nässen. Diese Stahlkeule ist durch einen tüchtigen Rotangstrick befestiget, nur so dick wie ein Finger, aber stärker als unsere Darmstricke. Dieser Strick ist an den Schnellbalken angemacht; man befestiget dort ein Triangel von Holz, und ein anderer Mensch sitzt an diesem Stricke. In dem Mafse, als der Schnellbalken aufsteigt, nimmt er das Triangel, und läfst es einen halben Zirkel beschreiben, damit die Stahlramme in einer entgegengesetzten Richtung fällt. Zu Mittag lösen sich die zwei Arbeiter ab, und werden Abends von zwei andern ersetzt. Wenn sie 3″ gegraben haben, so zieht man diese Stahlramme mit allem Gestein, wovon sie beschwert ist (denn sie ist, wie gesagt, oben concav), durch Hülfe eines Cylinders heraus, worauf der Strick gerollt wird. Oft ist nicht alles bis in die nöthige Tiefe Felsen, sondern Erd- und Kohlenlager etc.; dann wird die Arbeit sehr schwierig und oft nutzlos; denn da diese Steinarten keinen gleichen Widerstand darbieten, so verliert das Loch seine senkrechte Richtung, aber diefs geschieht selten. Sonst sind diese Brunnen oder Röhren ganz senkrecht, und geschliffen wie Glas. Bricht der Ring, an welchem die Stahlramme aufgehängt ist, so braucht man 5 — 6 Monate, um durch Hülfe anderer die erstere zu zermalmen und heraus zu schwemmen. Wenn der Felsen ganz zu dieser Arbeit tauglich ist, so bohrt man alle 24 Stunden gegen 2 Fufs. Es dauert aber we-

nigstens drei Jahre, bis ein Brunnen fertig wird *). Um Wasser herauf zu bringen, steckt man in das Brunnenloch eine 24′ lange Bambusröhre, an deren Ende ein Ventil ist; wenn diese Röhre am Boden des Brunnen angelangt ist, setzt sich ein starker Mann auf den Strick, und bewegt ihn heftig; jede Bewegung öffnet das Ventil, und macht das Wasser steigen. Wenn die Röhre voll ist, so wird ein groſser Cylinder in Gestalt einer Rolle von 50′ Umfang, auf welchen der Strick läuft, von 2, 3 — 4 Ochsen oder Büffeln gedreht, und die Röhre steigt; dieser Strick ist auch von Rotang. Das Wasser ist sehr soolig, und gibt bei der Verdunstung $^1/_5$, manchmal $^1/_4$ Thl. Salz. Das Salz ist sehr scharf und ungesund.«

» Die Luft, die aus diesen Brunnen kommt, ist entzündlich. Wenn man eine Fackel in dem Augenblicke, als die mit Wasser gefüllte Röhre oben anlangt, an die Mündung des Brunnens brächte, so würde sie sich zu

*) Daſs man von Tag an in 24 Stunden ein Loch von 2 F. Tiefe in einen Fels bohret, ist nichts Ungewöhnliches, aber daſs man ohne Rücksicht auf die Tiefe, bis zu welcher man gekommen ist, diese Arbeit mit gleichem Succeſs fortsetzen könne, ist nicht glaublich, ja nach den aus unseren Gegenden entnommenen Erfahrungen unmöglich. Wenn es erlaubt ist, diese auf China zu übertragen, so kann ein Menschenleben nicht hinreichen, einen Brunnen zu bohren von der Tiefe, wie hier angegeben wird, und mit unseren Werkzeugen wird selbst chinesische Ausdauer und Geduld weit, sehr weit hinter dieser Gröſse zurückbleiben, abgesehen von der an das Unmögliche grenzenden Schwierigkeit, das Bohrmehl aus solcher Tiefe herauszuschaffen, sey es nun durch mechanischen Zug oder durch Wasser. Indeſs ist es nicht die Tiefe und die zur Anlegung solcher Brunnen erforderliche Zeit, sondern nur das Daseyn derselben in China, dessen Beweis hier beabsichtigt wird.

(Die Red.)

einem Feuerstrahle von 20—30′ entzünden, und die ganzen Bauten mit der Schnelligkeit des Blitzes verbrennen. Dieſs geschieht manchmal aus Nachläſsigkeit oder böser Absicht. Es gibt solche Brunnen, die man nicht auf Wasser, sondern auf Feuer benützt, man nennt sie *Feuerbrunnen.* Ein kleines Bambusrohr (diese Flamme greift es nicht an) sperrt die Mündung der Brunnen, und leitet die brennbare Luft nach Belieben; man entzündet sie mit einer Kerze, und sie brennt immer so fort. Die Flamme ist bläulich, 3 — 4″ hoch und 1″ breit. Sie verlischt nur, wenn man ein Stück Thon auf die Öffnung gibt, oder durch ein starkes Blasen. Will man Wasser aus so einem Brunnen ziehen, so verlöscht man die Flamme, weil sonst das mit dem Wasser häufig aufsteigende Gas, wie gesagt, alles zersprengen und entzünden würde. Die Chinesen glauben, dieſs sey das Feuer der Hölle, und fürchten es sehr. In der That ist es heftiger als das gewöhnliche, es ist sehr übel riechend, und gibt einen schwarzen und dicken Rauch. Hier ist das Feuer zu klein, um das Salz zu kochen. Die groſsen Feuerbrunnen sind in Tsé-Licou-Tsing, 40 Stunden weit. Für die vielen Salzbrunnen braucht man eine erstaunliche Menge Steinkohlen. In diesen Gruben befindet sich auch viel entzündliches Gas, und man kann dort keine Lampen brennen. Die Bergleute behelfen sich tappend, indem sie sich nothdürftig mit einem Gemenge von *saure de bois* und Harz leuchten, welches ohne Flamme brennt, und nicht verlischt (?). Diese Salzbrunnen und Kohlenwerke beschäftigen hier eine ungeheure Menschenmenge; es gibt reiche Leute, die gegen 100 solcher Salzbrunnen haben. Wenn sie die Salzbrunnen graben, finden sie meistens in 1000′ Tiefe eine harzige Kohle, die selbst im Wasser

brennt [6]). Man gewinnt davon 400 — 500 Pfund. Diese Kohle ist sehr stark riechend, man gebraucht sie, um die Gebäude zu erleuchten, in denen die Salzbrunnen und Kesseln sind. Die Mandarinen kaufen öfters auf Befehl des Kaisers viele tausend Pfund, um die Felsen in den Flüssen zu calciniren, die die Schifffahrt hindern. Wenn ein Schiff verunglückt, beschmiert man einen Stein mit dieser Kohle, entzündet ihn, und wirft ihn ins Wasser; diese unterwässerige Lampe macht die Taucher Alles sehen.«

Über die vorerwähnten Feuer- (Gas-) Brunnen äussert sich nun Hr. *Imbert* in einem spätern Schreiben aus Tsé-Licou-Tsing vom 13. Sept. 1827 folgender Maſsen:

»Tsé-Licou-Tsing liegt im Gebirge an einem kleinen Flusse, es enthält gleichfalls Salzbrunnen auf selbe Art gemacht, wie in Ou-Tong-Kioa, aber überdieſs eines der gröſsten Naturwunder, so man sehen kann. In einem Thale nämlich befinden sich 4 Brunnen, die kein Wasser, und nur Feuer in einer wahrhaft unglaublichen Menge liefern. Diese Brunnen gaben im Anfang Salzwasser, da dieses aber versiegte, so drang man, um wieder neues Wasser zu erhalten, vor ein Dutzend Jahren bis 3000′ (?) und mehr Tiefe; dieſs war vergeblich, aber es drang augenblicklich eine ungeheure Luftsäule hervor, welche sich in groſse schwärzliche Dämpfe verwandelte. Ich habe sie selbst gesehen. Dieſs ähnelt nicht dem Rauche, sondern vielmehr dem Dampfe ei-

---

6) Dergleichen Steinkohlen hätte unsere dermalige Oryktognosie noch nicht aufzuweisen. Es müſste dieſs eine Art seyn, die mit Naphta durchdrungen wäre, welche sonderbar genug bisher in Persien und andern asiatischen Ländern, meistens in der Nähe von Steinkohlenlagern, gefunden wurde. » Chemisches Wörterbuch von *John*. Leipzig 1817.«

nes glühenden Ofens. Diese Luft entweicht mit einem schrecklichen Getöse und Geschnarche, welches man sehr weit hört. Es zieht und dringt unaufhörlich hervor, und endet niemals. In der Entfernung einer Stunde ist ein kleiner, eine halbe Stunde umfänglicher sehr tiefer See; er ist ohne Verbindung mit dem nahen Flusse, und liefert blofs gewöhnliches Wasser. Die Mündung des Brunnens ist mit einer Bedeckung von Quadersteinen von 6—7′ Höhe umgeben, damit aus Zufall oder Bosheit kein Feuer dazu kommen könne. Dieses Unglück geschah im August 1826. Dieser Brunnen ist in der Mitte eines weitläufigen Hofes, welcher von vier langen und grofsen Hallen umgeben ist, worin die Salzpfannen stehen. So wie das Feuer an die Mündung des Brunnen gelangte, erfolgte eine schreckliche Explosion und ein ziemlicher Erdstofs. Im Augenblicke war die Oberfläche des Hofes eine Flamme, welche ungefähr 2′ hoch auf dem Boden hin und her flackerte, ohne etwas zu zünden. Vier Menschen wagten sich, und trugen einen ungeheuern Stein auf die Mündung des Brunnen, doch wurde er sogleich in die Luft geschleudert, drei von den Trägern verbrannten, nur der vierte rettete sich; weder Wasser noch nasse Erde können das Feuer löschen. Endlich nach zwei Wochen riesenmäfsiger Arbeit trägt man eine grofse Menge Wasser auf einen nahen Berg, man bildet einen Teich, und sticht ihn plötzlich ab, das daherströmende Wasser löscht endlich die Flamme. Die Kosten betrugen 20,000 Franken, welches in China eine grofse Summe ist.«

»Einen Fufs unter der Erde auf den vier Seiten des Brunnen sind vier ungeheure Bambusröhre eingelassen, welche die Luft unter die Pfannen leiten. Ein einziger Brunnen macht deren mehr als 300 kochen, wovon jede eine eigene Feuerröhre hat. An dem Ende der Bambus-

röhre ist eine 6″ lange Röhre von Töpferthon aufgesetzt, welche 1″ Lichte hat; diese Erde verhindert den Bambus zu zünden. Andere Röhren, welche nach aussen laufen, beleuchten die Gänge und die groſsen Kochpfannen. Der unnöthige Überrest wird durch eine Röhre auſserhalb des Gehöfdes geleitet, und bildet dort drei ungeheure Essen oder Feuerstrahlen, welche 2′ über die Öffnung herausflackern. Die Oberfläche des Bodens im ganzen Hofe ist auſserordentlich heiſs, und brennt unter den Sohlen. Im Winter graben die Armen in einer Rundung den Sand auf, ungefähr 1′ tief, diese Grube zünden sie mit einer Hand voll Stroh an, und wärmen sich so an diesem nie verlöschenden Feuer; wollen sie dieses bewirken, so werfen sie den Sand wieder auf die Grube. Die Kochpfannen haben 4 — 5″ Dicke, doch verkalken oder schmelzen sie in wenigen Monaten. Das Salz ist hart wie Stein, weiſser als das von Ou - Tong - Kiao, und von besserem Geschmack.«

Obgleich diese Erzählung auſserordentliche und für unsere dermalige Geognosie schwerer zu lösende Erscheinungen enthält, so können wir doch weder innere noch äuſsere Gründe finden, warum wir den Angaben des Hrn. *Imbert* im Ganzen nicht glauben sollten. Eine Erzählung von Edelsteinen und Gold, oder wenn dieselbe das Erscheinen von symbolischen Figuren etc. enthielte, dürfte dem Verdachte einer schriftstellerischen Dekorirung oder Befangenheit weniger entgehen, aber Steinkohlen und brennbares Gas sind Dinge, welche nicht wohl eine derlei Ursache zulassen. — Und so wird es denn einem zukünftigen naturhistorischen Reisenden nach jenen Gegenden überlassen bleiben, diese höchst interessanten Facta vollkommen aufzuhellen.

2. Über Explosionen an Dampfmaschinen. Von *Arago*.

(*Annuaire du Bureau des Long., pour l'an* 1830.)

Die Dampfmaschinen werden sicher unter die Meisterstücke des menschlichen Erfindungsgeistes gerechnet werden, sobald es gelingt, ihre Explosion unmöglich, oder doch wenigstens unschädlich zu machen; ein Problem, dessen vollständige Lösung noch zu erwarten steht. *Papin's* Sicherheitsklappen reichen wohl in den gewöhnlichen Fällen hin, allein es gibt, glücklicher Weise, nur selten Umstände, unter denen sie unzureichend und sogar gefährlich werden. Diese Umstände anzugeben, und so weit es der unvollkommene Zustand unserer Kenntnisse in diesem Fache erlaubt, ihre Ursachen zu entwickeln und anzugeben, womit man ihnen allenfalls begegnen könnte, ist der Zweck dieses Aufsatzes, und ich glaube nicht zweckmäſsiger verfahren zu können, als wenn ich mit einer gedrängten Erzählung aller mir bekannten Explosionen beginne, deren Verlauf bewährte Ingenieure beobachtet oder berichtet haben.

1. Beispiele von auſserordentlichen Wirkungen einer Explosion.

Im Jahre 1814 führte der Eigenthümer der groſsen Branntweinbrennerei, *Lochrin*, bei Edinburg, die Dampfheitzung ein. Weite Metallröhren, stets mit einem Dampfstrome aus sehr heiſsem Wasser gefüllt, durchstrichen der ganzen Länge nach die Gefäſse, in welchen sich die zum Sieden zu bringende Flüssigkeit befand. Der Dampf wurde in einem Kessel aus Schmiedeeisen erzeugt von mehr als $^1/_3$ Zoll in der Dicke, 37 engl. Fuſs lang, am Boden 3, oben beim Deckel 2 Fuſs breit, 4 Fuſs hoch, 180 Centner schwer. An der Decke waren zwei Sicherheitsklappen, die sich öffnen muſsten, wenn der innere

Druck 60 Pf. auf den Quadratzoll überstieg, was einem Druck von vier Atmosphären entsprach. Damit nicht die Arbeiter die Klappen überlüden, war eine derselben in einem versperrten Drahtkäfig eingeschlossen.

Dieser ungeheure Apparat begann den 21. März zu arbeiten; zwölf Tage hierauf war er nicht mehr, eine Explosion hatte ihn gänzlich zerstört. — Während der Katastrophe theilte sich der Kessel in zwei ungleiche Theile; der obere, bestehend aus dem Deckel und den zwei Seitenwänden, wog 140 Centner. Er wurde von unten nach oben mit solcher Macht geschleudert, daſs er das Ziegelgewölbe und das Dach des Arbeitzimmers zerschmetterte, und sich über dasselbe hinaus bis in eine Höhe von 70 Fuſs vertical erhob. Diese ungeheure Masse fiel hierauf 150 Fuſs von ihrem vorigen Orte auf eines der Gebäude der Brennerei nieder, drückte es ein, und brach zuletzt eine weite Wanne von Guſseisen zusammen, die im Erdgeschoſse stand.

In der Nähe des Kessels befanden sich zum Glücke nur zwei Arbeiter, und nur diese verloren das Leben; ein um so merkwürdigerer Zufall, als die andern Theile des Arbeitzimmers eben mit Menschen gefüllt waren, und der Kessel gleich einer springenden Mine in allen Richtungen und mit furchtbarer Geschwindigkeit Trümmerstücke von sich schleuderte. Der Körper eines der beiden Arbeiter war mitten entzwei gerissen, die Füſse lagen beim Kessel, der Rumpf auſserhalb des Gebäudes unter den Trümmern.

Die Linie, längs welcher der Kessel riſs, war vollkommen horizontal, und folgte einer Reihe Nägel auf eine so regelmäſsige Weise, als ob man das Eisen mit scharfen Scheren entzwei geschnitten hätte. Der Boden des Kessels, auf die *Watt*'sche Art, nach auſsen concav, war nach der Explosion convex, so sehr hatte ihn der

Dampf von innen heraus gedrückt; und was noch merkwürdiger ist, und kaum zu glauben wäre, wenn nicht eine genaue Besichtigung des Ortes es bestätiget hätte, der Boden des Kessels, der doch 40 Centner wog, und so sichtbare Zeichen eines Druckes *von oben nach unten* an sich trug, war während der Explosion *emporgehoben* worden bis auf eine Höhe von 14 — 15 Fuſs, und eine ziemliche Strecke von dem massiven Mauerwerk weggetragen, auf welchem er befestiget war.

Kein Umstand — und diese Bemerkung ist von Wichtigkeit — berechtiget uns, diesen Unfall einer schlechten Construction oder einer Überladung der Sicherheitsklappen zuzuschreiben.

Das folgende Beispiel ist darum merkwürdig, weil zu gleicher Zeit mehrere Kessel explodirten. Das Dampfschiff, *die Rhone*, gebaut von *Aitkin* und *Steel*, und bestimmt zum Zugschiff auf dem Wege zwischen Arles und Lyon, trug eine ungeheure Maschine, mit groſser Genauigkeit auf der Werfte zu Paris gebaut, und von vier Kesseln aus Eisenblech gespeist, jeder $1^{m},3$ im Durchmesser. Nach dem Unfalle ward ersichtlich, daſs das Metall an vielen Stellen nur 6^{mm} in der Dicke hatte.

Den 4. März 1827, während man alles zu einem Versuche vorbereitete, der in Gegenwart aller Behörden Lyons Statt finden sollte, ward das Schiff in die Luft gesprengt. Mehrere Personen, unter andern *Steel* selber, wurden ein Opfer dieses Ereignisses; ja selbst einige Zuschauer auf den Quais der Rhone wurden durch Trümmer des Holzwerkes getödtet. Das ganze Verdeck ward eine weite Strecke hingeschleudert; die Röhrenleitungen und die Rauchfänge, mehr als 30 Centner schwer, erhoben sich beinahe vertical auf eine bedeutende Höhe; die Kuppel eines Rauchfangs fiel

250 Meter von ihrem ersten Orte nieder, und doch wog sie nicht viel weniger als 20 Centner.

Diese schreckliche Katastrophe war eine unausbleibliche Folge der Unklugheit des Ingenieurs. Da er die Geschwindigkeit des Dampfstroms nicht in dem Maſse, wie er hoffte, zu mäſsigen vermochte, so machte er die Sicherheitsklappen der vier Kessel fest, und benahm ihnen alle Beweglichkeit. Diese Thatsache, so unglaublich sie auch zu seyn scheint, ist authentisch erwiesen worden.

Wir haben bemerkt, daſs das Schiff vier Kessel hatte; zwei von diesen sprangen beinahe in demselben Augenblicke, und wenn ich gut benachrichtiget bin, so hat man auch an dem dritten Kessel, den man seit Kurzem aus der Rhone zog, einen Sprung bemerkt. Dieses in derselben Secunde bei zwei oder gar drei verschiedenen Kesseln eingetretene Zerspringen ist ein beachtenswerther Umstand, und wir werden davon Rechenschaft zu geben haben, wenn wir von den verschiedenen Erklärungen dieser Phänomene sprechen. — Auch darf ich nicht vergessen, zu sagen, daſs auch in Lyon wie zu Lochein die weggeschleuderte Kuppel in einer beinahe horizontalen Linie vom Kessel abgetrennt war, obgleich im Umfange dieser Linie das Metall Differenzen in der Dicke von mehr als zwei Millimetern zeigte. Hr. *Tabareau*, von dem ich diese schätzenswerthen Details entlehne, hat berechnet, daſs wegen dieser zwei Millimeter Dicke die dicksten Stellen der Wände einen Druck von sechs Atmosphären mehr aushalten könnten, als die übrigen, auf welche der Gesammtdruck 24—25 Atmosphären betrug. Also fand ein *gleichzeitiger* Riſs in Theilen des Kessels Statt, deren Haltbarkeit um wenigstens sechs Atmosphären verschieden war.

Etwas Ähnliches berichtet der Capitän *Reed* von der

Explosion der Dampfmaschine in den Zinngruben zu Polgooth. Diese Maschine wurde von drei Kesseln gespeist, und einige Augenblicke gesperrt, um dem Ingenieur möglich zu machen, die Druckpumpe des Schöpfwerkes zu repariren; da sprangen zwei Kessel gleich hinter einander. Kaum hatte die erste Explosion aufgehört, so wurde schon die zweite vernommen.

2. Explosionen wegen Überladung der Sicherheitsklappe.

Nach der Explosion, welche die Zuckerraffinerie der Wellclose-Square in London gänzlich zerstörte, ward dargethan, daſs der Guſs, aus dem der Kessel bestanden, nicht überall von hinreichender Dicke war. Am Boden hatte er nicht weniger als $2\,^1/_2$ engl. Zoll, an den beiden verticalen Seitenwänden $1\,^1/_2$ Zoll, im untern Theil der Decke nur $^7/_{16}$ Zoll, und an einigen andern Stellen hatte er auch nicht mehr als $^1/_2$ Zoll. Einige Momente vor dem Unfalle hatte ein Agent des Erbauers, verdrüſslich wegen der schwachen Wirkungen des Apparats, die Klappe, trotz aller Vorstellungen der Raffineurs, mit einem ungeheuern Gewichte belastet, während er zu gleicher Zeit das Feuer so viel als möglich schürte. — Wir bemerken, daſs auch in London, wie zu Lyon, der Kessel zugleich allenthalben sprang, obgleich man hätte muthmaſsen sollen, daſs, wenn die eine Stelle der Kraft 1 unterlag, die andere noch der Kraft 2 widerstehen werde.

Während der Untersuchung, die das Unterhaus 1817 bei Gelegenheit der Explosion eines Dampfschiffes zu Norwich anstellte, erwähnte *William Chapman*, Civil-Ingenieur zu Newcastle, der Explosion einer Dampfmaschine, die ebenfalls durch eine Überladung veranlaſst worden war. Ein Arbeiter hatte sich auf die Klappe ge-

setzt, um seine Kameraden die schwankende Bewegung bewundern zu lassen, in die er gerathen würde, sobald der Dampf stark genug wäre, ihn aufzuheben. Es geschah, was voraus zu sehen war; die Klappe öffnete sich nicht, allein der Kessel sprang, tödtete und verwundete eine Menge Leute.

In Amerika sprang ein Dampfschiff auf dem Ohio, während die Mannschaft die Anker lichtete, d. i. in einem Momente, wo, weil die Maschine nicht ging, keine Dampfconsumption Statt fand, während im Gegentheile das Feuer schon in voller Kraft stand. Die Klappe öffnen oder entladen wäre das einfachste Mittel gewesen, jedem Unfalle vorzubeugen; aber der Ingenieur hatte die unglaubliche Unvorsichtigkeit, noch ein neues Gewicht darauf zu legen.

3. Explosionen, denen eine bedeutende Verminderung der Dampfelasticität oder gar ein Öffnen der Sicherheitsklappen vorausging.

Die Reihe der Thatsachen, die ich jetzt darstellen werde, zeigt schon viel mehr Verwickelungen und Dunkelheiten, als die vorangegangenen; weder die Unbeweglichkeit noch die Überladung der Sicherheitsklappen kommt hierbei in's Spiel. Viele unter ihnen, ich gestehe es frei, haben so viel Paradoxes, daſs man beim ersten Anblick ihre Wahrheit zu bezweifeln versucht wird; allein die Beispiele sind zahlreich, und durch unwiderlegbare Zeugnisse dargethan.

Vor der Explosion des Dampfschiffes, der Antea, in Amerika, gab die Maschine nur 18 Pumpenzüge in der Minute, während sie beim gewöhnlichen Gange 20 gab. — Am Tage der Explosion des Dampfbootes, *le Rapide*, zu Rochefort, zeigte das Manometer oft eine Elasticität des Dampfes an, die um 30 Centimeter Queck-

silber die der Atmosphäre übertraf; aber einige Augenblicke vor dem Ereignisse war das Manometer auf 15 Centim. gefallen. — Bei der Untersuchung, zu der die Explosion des Dampfschiffes Graham Veranlassung gab, ergab sich, daſs man den Augenblick vor dem Unfalle 20 Pf. von der Ladung der Sicherheitsklappe weggenommen hatte.

Einige Augenblicke, ehe der gegossene Kessel unter mittlerem Druck in der Spinnerei des Hrn. *Peray* zu Essone explodirte (8. Februar 1823), ging die von ihm gespeiste Maschine merklich *langsamer* als gewöhnlich, so daſs die Arbeiter sich darüber beklagten. Im Momente der Explosion *öffneten sich* die beiden Klappen, und der Dampf strömte mit Gewalt heraus. — Ein ähnlicher Unfall ereignete sich einige Tage nachher auf dem Boulevard du Mont-Parnasse zu Paris; auch hier beschwerten sich die Arbeiter über den *trägen* Gang der Maschine, die durch die Verzögerung der Arbeit ihnen den Taglohn verkürze, und einige Augenblicke hierauf sprang der Kessel, den sie beinahe für dampfleer gehalten hatten. Dieser Kessel war aus Kupferblech, und nichts läſst argwöhnen, daſs die Sicherheitsklappen sich in schlechtem Zustande befanden, im Gegentheil hat man Ursache anzunehmen, daſs ein starker Dampfstrom der Explosion voranging.

Ein Kessel, den man gebaut hatte, um Dampf von niederem Druck zu erzeugen, sprang mitten in einem Atelier zu Lyon, unmittelbar nachdem man einen weiten Entladungshahn geöffnet hatte, aus dem der Dampf mit Schnelligkeit zu entweichen begann. Den Hahn öffnen oder die Sicherheitsklappe herausziehen, ist offenbar ein und dasselbe; die Explosion wurde also in diesem Falle durch eine Handlung veranlaſst, durch welche man allgemein ihr vorzubeugen glaubt. — Diese

Thatsache, so aufserordentlich sie ist, wird wohl vollen Glauben finden, wenn ich sage, dafs ich sie dem Hrn. *Gersont* von Lyon verdanke, und dafs dieser geschickte Ingenieur Zeuge hievon war.

Wenn im äufsersten Falle, wie in dem so eben erzählten, das Öffnen einer Klappe den Rifs des Kessels verursachen kann, so mufs sie auch oft, ohne einen solchen Unfall hervorzurufen, wenigstens eine plötzliche und merkbare Vermehrung der Elasticität des Dampfes veranlassen. Dieses Phänomen, innerhalb der schicklichen Grenzen, kann auch ohne allzugrofse Gefahr untersucht werden. Ich weifs auch, dafs dieser Versuch zu Lyon wirklich angestellt wurde, und dafs bei einem kleinen Kessel unter hohem Druck, als man einen weiten Entladungshahn öffnete, die Sicherheitsklappe augenblicklich in die Höhe ging. Hr. *Tabareau*, Director der Schule de la Martinière, und Hr. *Rey*, Professor der Chemie, haben dieses Resultat verbürgt; doch mufs ich gestehen, dafs zu Paris Hr. *Dulong* und ich stets bei Öffnung der Klappe eine Verminderung des Druckes eintreten sahen. Die wahrscheinlichen Ursachen dieses Widerspruchs der Resultate werde ich weiter unten angeben, und sie werden hoffentlich zeigen, wie man dergleichen Unfälle vermeiden könne.

4. Innere Zerschmetterungen der Kessel und besondere Unfälle bei Kesseln mit innerer Heitzung (in der Form concentrischer Cylinder).

Kessel aus gehämmerten Eisen- oder Kupferplatten, besonders solche, die unter einem schwachen Druck arbeiten müssen, erleiden unter einigen Umständen Unfälle, die genau die entgegengesetzten von denen sind, mit welchen wir uns bisher beschäftiget haben. Manchmal bersten die Kessel, weil ihre Wände plötzlich von aus-

sen nach innen gebogen werden. Lyon und St. Etienne waren der Schauplatz von mehreren Ereignissen der Art, gegen die man sich verwahren muſs, sey es auch nur, weil ansehnliche Manufacturanstalten dadurch plötzlich in eine gänzliche Unthätigkeit versetzt werden.

Die kleinen (innern) Cylinder der Kessel mit innerer Heitzung bersten auch von Zeit zu Zeit; denn manchmal können ihre Wände dem Drucke des in dem ringförmigen Raume enthaltenen Dunstes nicht widerstehen, sie geben nach, und platten sich plötzlich ab. Da nun diese Bewegung nicht Statt finden kann, ohne daſs das Metall irgendwo springt, so verbreitet sich das siedende Wasser in Strömen durch die umgebenden Arbeitszimmer, und verursacht oft viel Unglück. Ich entlehne ein Beispiel eines Unfalles der Art aus dem Werke *J. Taylor's*, Mitgliedes der königl. Gesellschaft zu London:

In Flintshire bei den Mold-Mines stand eine ungeheure Dampfmaschine, von drei Kesseln mit innerer Heitzung gespeist. Eines Tages blieb die Maschine 5 Minuten lang stehen; der Oberaufseher nahm die Heitzthüren bei allen drei Kesseln ab, schloſs an zweien die Zuglöcher der Schornsteine, und war eben beschäftiget, an dem dritten Kessel dieselbe Operation vorzunehmen; aber kaum war die sperrende Metallplatte an ihrem Platze, so sah er eine Feuerflamme sich vom Herde ins Zimmer stürzen, und alsogleich folgte eine Explosion. Zwei Arbeiter, die sich unglücklicher Weise in der Richtung befanden, die das siedende Wasser nahm, waren alsogleich getödtet. Eine aufmerksame Untersuchung des Kessels zeigte, daſs der äuſsere Cylinder sich nicht vom Platze gerührt, noch irgend einen Schaden genommen hatte, ja das Gewicht, das am Hebel der Sicherheitsklappe hing, war nach dem Unfalle noch an seinem Orte. Der kleinere Cylinder hatte auch keine

Ortsveränderung erlitten, die bei solchen Kesseln manchmal die Folge einer Explosion zu seyn pflegt; allein er war dergestalt abgeplattet, dafs man in einen grofsen Theil seiner Länge kaum die Hand hineinbringen konnte, so sehr waren die beiden *Seitenwände* einander genähert. — Beim ersten Anblicke könnte es befremden, dafs ich eine Explosion, die ein Übermafs der Dampfkraft veranlafste, Unfällen zur Seite stelle, die, wie der vorige Paragraph aus einander setzte, aus der so zu sagen entgegengesetzten Ursache entspringen; allein man wird bald sehen, dafs diese beiden Arten von Wirkungen allem Anscheine nach denselben Ursprung haben.

Überhaupt kann man, so verwickelt überhaupt die Untersuchung über die Stärke der Gefährdung der verschiedenen Theile einer Dampfmaschine ist, mit Sicherheit sagen, Dank den trefflichen Nachweisungen, die *J. Taylor* vor zwei Jahren bekannt gemacht hat, dafs bei Kesseln mit innerer Heitzung die Wände des kleinern Cylinders der schwächste Theil sind.

So fand man nach der beinahe gleichzeitigen Explosion zweier Dampfmaschinen im Zinnbergwerke zu Polgooth, dafs die innern Cylinder beider zusammengebogen und an einer grofsen Anzahl Stellen gesprungen waren. In dem Bergwerke von Est-Crennis wurde der kleine Cylinder nicht nur durch die Annäherung seiner beiden Wände abgeplattet, sondern er wurde sogar mit grofser Gewalt aus der Werkstube heraus geschleudert, ohne dafs der äufsere Cylinder sich vom Platze gerührt, oder irgend einen bedeutenden Schaden erlitten hätte.

5. Explosion, der eine grofse Erhitzung der Kesselwände vorausging.

Eine zu starke Erhitzung jenes Theiles des Kessels, den man den Dampfbehälter nennt, kann auch Unfälle

veranlassen. Das Gufswerk zu Pittsburg in Amerika gibt hievon ein Beispiel. In dieser Anstalt nahm eine Maschine von hohem Druck und der Kraft von 80 Pferden den Dampf aus drei gesonderten, cylindrischen Kesseln auf, deren jeder 30 engl. Zoll im Durchmesser, und 18 Fufs in der Länge hatte. Man hatte seit Langem bemerkt, dafs wegen eines Fehlers in einer Seitenröhre, die aus der speisenden Pumpe Wasser zuführen sollte, einer dieser Kessel nicht genug Wasser empfing, und rothglühend wurde; allein da der von den beiden andern Kesseln zugeführte Dampf hinreichte, so glaubte man der Reparatur dieses Übels sich entheben zu können. Allein eines Tages explodirte der rothglühende Kessel, rifs sich mit seinem gröfsten Theile an einem Ende ab, ward wie eine Rakete unter einem Winkel von ungefähr 45° fortgeschleudert, drang durch das Dach des Gebäudes, und fiel in einer Entfernung von 600 engl. Fufs nieder.

6. Explosion eines Kessels in der Luft.

Selten erhält man genaue Details über die Umstände, von denen die Explosion einer Dampfmaschine begleitet war, entweder weil diese Unfälle unvermuthet eintreten und kaum einige Zehntel Secunden dauern, oder weil die Zeugen beinahe immer auch die Opfer dieses Ereignisses waren. Eine aufmerksame Besichtigung der Localitäten, der Form, Masse und Entfernung der Trümmer läfst zwar oft erkennen, welcher Theil des Kessels zuerst unterlag, und mit welcher Geschwindigkeit die Bruchstücke fortgeschleudert wurden; allein gewöhnlich mufs man hierbei auch stehen bleiben. Es ist daher von Wichtigkeit, alles das mit Sorgfalt zu sammeln, was der Zufall uns sonst noch über so traurige und unsere Aufmerksamkeit so in Anspruch nehmende Unfälle lehrt.

Ein Auszug aus einem Briefe des Hrn. *Perkins* liefert hierüber einige interessante Data:

»Ich hörte, schrieb mir dieser geschickte Ingenieur, »von einer Explosion, der die Bildung einer Spalte vor»ausging, durch welche der Dampf mit ungeheurer Ge»schwindigkeit ausströmte. Allein trotz dieser gelegent»lichen Sicherheitsklappe wurde der Kessel von dem »Mauerwerk losgerissen, auf dem er ruhte, in ganzer »Masse einige Fuſs über den Boden erhoben, und *erst* »*in der Luft* fand die Explosion Statt, die ihn in zwei »Stücke theilte. Die obere Hälfte erhob sich sehr hoch, »die andere fiel mit groſsem Getöse auf den Boden zu»rück.« — Haben nicht alle diese Umstände auch bei der Explosion zu Lochrin zusammengetroffen?

Auf alle diese eben erzählten Thatsachen gestützt, bleibt mir nur übrig, die *verschiedenen* Veranlassungen so vieler Unfälle aufzusuchen, und die Mittel anzugeben, ihnen zuvor zu kommen.

7. Nothwendigkeit der Sicherheitsklappen, *Papin*'sche Klappen, ihre Fehler; Unfälle, denen sie vorbeugen können.

Florence Rivault, *Salomon de Caus*, der Marquis von *Worcester* hatten schon 1605, 1615, 1633 bemerkt, daſs ein mit Wasser gefülltes Gefäſs, wie stark auch seine Wände wären, in Trümmer gehe, sobald man es hinlänglich lange einem lebhaften Feuer aussetzt, und keine Öffnung vorhanden ist, die dem Dampfe im Maſse, wie er sich erzeugt, einen Ausgang verschafft.

Die Temperatur, bei welcher das Gefäſs springt, hängt von dessen Gestalt und Dimensionen, der Haltbarkeit und Dicke seiner Wände ab. Und wenn man unter allen Umständen sicher wäre, einen im Voraus bestimmten Wärmegrad nicht zu überschreiten, so brauchte

man weiter keine andere Vorsichtsmaſsregel; allein wenn man nur einmal gesehen, wie ein gewöhnlicher groſser Ofen geheitzt wird, wenn man bemerkt hat, bis auf welchen Grad die Wärmeentwickelung von der Beschaffenheit der Kohle, ihrer Verkleinerung, ihrer mehr oder weniger gleichförmigen Vertheilung auf dem Roste, ja sogar von der Beschaffenheit der Atmosphäre abhängt, so entsagt man bald dem Gedanken, in der Bauart des Kessels und der Art der Heitzung Mittel gegen die Explosionen zu finden.

Wir müssen also von der Voraussetzung ausgehen, daſs ein vollständig geschlossener Kessel, dessen Dicke nicht gar ungeheuer ist (und es hätte Inconvenienzen gar mancherlei Art, wenn man hierin gewisse Grenzen überschreiten wollte), von Zeit zu Zeit Dampf einschlieſse, dessen Elasticität den Widerstand der Wände zu überwinden vermag; und das einzige Mittel, einer Explosion zu entgehen, ist, zu hindern, daſs dieſs nicht geschehe.

Die von *Papin* erfundene Klappe scheint alle Schwierigkeit mit einem Male zu heben. Diese Klappe besteht aus einem Loch von etwa 1 Quadratcentimeter, in der Decke des Kessels angebracht, und über welches man eine mit Gewichten beladene Platte legt. Ist es nicht offenbar, daſs, so lange der innere Druck auf ein Quadratcentimeter kleiner als das Gewicht der Klappe mehr dem der Atmosphäre ist, das Loch verschlossen bleiben, aber sich alsogleich öffnen und dem Dampfe freie Bahn gewähren wird, wenn der innere Druck dieses Gewicht übersteigt? Und woher kommt es denn, daſs ein so vernünftiges, einfaches, leicht ausführbares Mittel doch nicht in allen Fällen unfehlbar ist?

Die Klappe öffnet sich im Momente, wo das sie niederhaltende Gewicht kleiner als der Druck des Dam-

pfes wird; allein diefs reicht nicht hin, jede Vermehrung der Spannung im Kessel zu hindern; hiezu ist erforderlich, dafs aus der Klappe wenigstens so viel Dampf ausströme, als das Übermafs des Dunstes beträgt. Der Verlust hängt von dem Durchmesser der Öffnung ab; nun kann eine Öffnung, die unter den gewöhnlichen Umständen allen Anforderungen genügt, viel zu klein werden, wenn aufserordentliche Zufälle eine beinahe augenblickliche und übermächtige Dunstbildung herbeiführen. In diesem Falle vermindert die Klappe wohl das Übel, allein sie hebt es nicht auf. Wenn nicht die Schwierigkeit der Adjustirung und die übermäfsige Gröfse der Gewichte, die man anwenden müfste, im Wege stünde, wäre es freilich vortheilhaft, Klappen mit sehr weiten Öffnungen zu gebrauchen. Indefs kann man, ohne die Sache aufs Äufserste zu treiben, zugeben, dafs man sich bis jetzt auf allzukleine Dimensionen beschränkt hat. Die Richtigkeit dieser Behauptung findet eine neue Bestätigung in den jüngst entdeckten Erscheinungen beim Ausflusse der Flüssigkeiten aus engen Öffnungen. Man fand wirklich, dafs eine freie, leichte Platte, die senkrecht einem Dampfstrome dargeboten wurde, der aus einer kleinen Öffnung eines Kessels von sehr hohem Drucke drang, nicht immer *abgestofsen* wurde. In eine kleine Entfernung von der Öffnung gelangt, wirken auf die Platte die abstofsende Kraft des Dampfes und die zur Öffnung hindrückende der Luft, und da diese beiden Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so hängt die Platte in der Luft wie unbeweglich. Es ist hier nicht der Ort zu prüfen, warum der Dampf bei seinem Ausflusse so viel Elasticität verliere, dafs der blofse atmosphärische Druck ihm das Gleichgewicht zu halten vermag; ich beschränke mich auf die blofse Thatsache: dafs die freie Platte sich nur äufserst wenig vom Loche entferne, dafs

dasselbe mit dem Klappendeckel geschehen werde, und dafs daher im Momente, wo sie in die Höhe steigt, viel weniger Dampf entweichen wird, als man berechnet hat, da man einen Strahl von der ganzen Breite der Öffnung voraussetzte.

Clement, der diese Phänomene mit ganz besonderer Sorgfalt untersuchte, hat aus ihnen ein vollständiges Verdammungsurtheil aller Klappen mit beweglichen Platten geschöpft. Das Urtheil scheint zu cathegorisch; allein stets bleibt diese blofs partielle Hebung des Deckels eine Schwierigkeit mehr für den Erbauer der Maschine, und für jetzt mufs man sie als eine der Mitursachen der Explosionen ansehen, wenn übrigens die Klappe allzu eng ist.

Gehen wir nun zu einer Schwierigkeit ganz anderer Art über: In Frankreich mufs nach dem bestehenden Gesetze jeder gegossene Kessel, ehe er die Stampiglie erhält, einen fünf Mal stärkern innern Druck überstanden haben, als der, dem man ihn auszusetzen gedenkt; dieser Probedruck geht auf das *Dreifache* zurück, wenn die Kessel aus gehämmertem oder geblechtem Kupfer oder Eisen bestehen. Diese Grenzen scheinen hinlänglich weit, und verursachen oft Beschwerden der Erbauer; allein wir werden indefs sehen, dafs sie noch keine vollkommene Bürgschaft gewähren.

Diese Versuche werden bei der gewöhnlichen Temperatur angestellt; nun aber besitzen die Metalle unter dieser Temperatur mehr Festigkeit als in der Hitze. Wenn man sich der Weifsglühhitze nähert, wird die Abnahme ungeheuer. *Tremery's* Versuche haben z. B. dargethan, dafs die Festigkeit des Schmiedeeisens in der Dunkelrothhitze kaum ein Sechstheil der des kalten Eisens ist. Wenn also zum Unglück ein Theil des Kessels in die Glühhitze geräth, so stünde man nahe an den

Grenzen eines möglichen Sprungs, ohne dafs die Klappe sich zu öffnen braucht, und ungeachtet man nach den in der Kälte angestellten Versuchen jede Gefahr weit entfernt glauben sollte.

Warum, wird man sagen, stellt ihr nicht einen vollkommen entscheidenden Probeversuch an? Warum bringt ihr nicht den Kessel in jene Lage, in welcher er arbeiten soll? Warum, mit einem Worte, wendet ihr beim Probedruck Wasser an der Stelle des Dampfes an? Hierauf läfst sich antworten, dafs mit Hülfe einer Wasserpumpe der Versuch überall, selbst im Atelier des Künstlers, mit wenig Vorbereitung und Kostenaufwand angestellt werden könne, während eine Probe mittelst Dampf für jeden Kessel die Erbauung eines eigenen Ofens, ein grofses Local und lästige Kosten erfordern würde. Endlich laufen bei Anwendung einer Pumpe die Zuschauer keine Gefahr, selbst in Fall der Kessel springen würde, was durchaus nicht der Fall wäre, wenn er, statt Wasser, Dampf enthielte. Die Vorsichten, die man im letztern Falle brauchen müfste, wären wieder eine neue, drückende Last für den Erbauer. Es scheint demnach, dafs die Wasserproben, ungeachtet der schon angegebenen Fehler und jener, von denen ich noch zu sprechen habe, dennoch nicht so leicht werden verdrängt werden können.

Wenn man auf die Wände eines Kessels mittelst einer Druckpumpe wirkt, wächst der innere Druck langsam und in beinahe unmerklichen Abstufungen. Man erfährt also, wenn man so vorgeht, nichts von der Wirkung einer beträchtlichen und *plötzlichen* Vermehrung des Drucks auf die Wände, und doch können solche Änderungen eintreten, wenn der Kessel einmal im Gange ist.

Endlich mufs man bemerken, dafs der in der Werk-

stube des Künstlers an einem neuen Kessel angestellte Versuch nur zeige, was dieser jetzt auszuhalten vermöge, nicht aber, was er nach einigen Wochen oder Monaten der Anstrengung erleidet, wenn die Ungleichheiten der Temperatur das Metall nach allen Richtungen ausgedehnt, seine Fasern getrennt, der Rost ihn zerfressen hat, etc.

Die Sicherheitsklappen also, wenn sie noch so gut construirt sind, können doch den Ingenieur nicht der Mühe entheben, seinen Kessel von Zeit zu Zeit zu prüfen, durch alle ihm zu Gebote stehenden Mittel plötzliche Veränderungen in der Dampfelasticität zu verhüten, und endlich zu sorgen, dafs ja kein Theil des Kessels eine allzu hohe Temperatur erhalte.

Ich habe bisher eine Klappe in gutem Stande vorausgesetzt, und beim ersten Anblick scheint es wirklich schwer, dafs ein so einfacher Apparat in Unordnung gerathe; allein wenn man bedenkt, dafs die bewegliche Platte oft roste, hierdurch und durch die Adhäsion, die sie im Stande der Ruhe zur untern festen Platte erhält, oft fast an derselben hänge, so kann man begreifen, wie die Platte oftmals bei einem viel stärkern Drucke, als bei dem der Künstler das Ausströmen des Dampfes voraussetzte, sich nicht vom Platze rührt. Hr. *Maudslay*, dessen Geschicklichkeit und Erfahrung rühmlichst bekannt sind, sagte, dafs eine Sicherheitsklappe nicht mehr diesen Namen verdiene, wenn man sie nur eine einzige Woche nicht spielen lasse. So sieht man auch an der Seite einiger Kessel ein Seil, dem Einheitzer zur Hand angebracht, das dazu dient, die Klappe von Zeit zu Zeit zu öffnen. So hat man zur Hervorbringung dieser Bewegung mehrere Hebel benützt, die von der Maschine selbst abhängen; allein, wenn der Kessel ein wenig entfernt steht, so ist diefs nicht mehr ausführbar.

Das Einheitzen wird gewöhnlich blofsen Arbeitern

überlassen, Leuten ohne alle Klugheit, die nur allzu oft die Klappen überladen, entweder um die Arbeit zu beschleunigen, wenn man sich bei ihnen darüber beklagt, oder um mit ihrem Muthe zu prahlen. Man entfernt diese Gefahr, wenn man zwei Klappen anwendet, die eine frei läſst, um den Dampf ausströmen zu machen, die andere (wie zu Lochrin) in ein Drahtgitter versperrt, zu dem nur der Eigenthümer oder der Ingenieur den Schlüssel hat. Die Anwendung der Doppelklappe macht übrigens eine königl. Ordonnanz in Frankreich zum Gesetz. Vielleicht dürfte man auch fordern, daſs jeder Kessel mit einem einfachen und *bequem angebrachten* Mechanismus versehen sey, aus dem der Arbeiter von Zeit zu Zeit entnehmen könnte, ob die Klappe adhärire oder nicht. Die nur ein wenig die Werkstuben besucht haben, wissen wohl, wie schwer man den Arbeiter gewöhne, eine Verrichtung mit Regelmäſsigkeit zu vollziehen, die keine Spur hinterläſst, wenn sie auch nur ein wenig Mühe kostet.

8. Leicht schmelzbare Platten *(plaques fusibles).*

Sobald erwiesen war, daſs die gewöhnlichen Klappen oft in Unordnung gerathen und nicht immer ein untrügliches Schutzmittel darbieten, suchte man sie durch einen Apparat ganz anderer Art zu ersetzen, dessen Wirkung nie ungewiſs seyn kann. Dieſs sind die Klappen aus leicht schmelzbaren Metallmischungen. — Um den Nutzen dieser Klappen wohl einzusehen, muſs man wissen, daſs der Wasserdampf wohl eine hohe Temperatur und wenig Elasticität, aber nie umgekehrt eine hohe Elasticität ohne entsprechende Temperatur haben kann. Da man nun weiſs, bei welchem Minimum der Temperatur der Dampf eine Elasticität von einer, zwei, drei, . . .

Atmosphären erlangt, so weiſs man auch, welche Temperatur er nicht ohne Gefahr überschreiten darf. Man bereitet daher eine Mischung aus Blei, Zinn und Wiſsmuth in solchen Verhältnissen, daſs sie bei der im voraus bestimmten Grenztemperatur schmilzt; es scheint also unmöglich, daſs diese Temperatur je überschritten werde, weil da alsogleich die Platte schmelzen und der Dampf frei ausströmen wird.

In Frankreich verlangt eine königl. Ordonnanz, daſs jeder Kessel mit zwei leicht schmelzenden Platten von ungleicher Gröſse versehen sey. Der Schmelzpunct der kleinern ist um 10° höher als die Temperatur des gesättigten Dunstes von derjenigen Elasticität, welche bei der gewöhnlichen Arbeit angewendet wird. Der Schmelzpunct der zweiten liegt um 10° höher, als jener der ersten. — Obgleich man verschiedene Fälle anführen kann, wo es wahrscheinlich diese Platten waren, die die Explosion abwehrten und groſses Unglück verhüteten, so wenden sie doch die meisten Künstler nur mit Widerwillen an, und ziehen die gewöhnlichen Klappen, mit denen ihre Maschinen überdieſs versehen seyn müssen, bei weitem vor. Die Einwürfe, die sie machen, sind folgende:

Zuerst hat man gesagt, diese Platten zeigen bloſs die Temperatur und nicht den Druck an; nun aber kann ein Dampf von sehr hoher Temperatur eine nur geringe Elasticität besitzen; allein wann kann dieſs geschehen? wenn der innere Dampf nicht mit Feuchtigkeit gesättiget ist, was vom Mangel an Wasser herrührt; allein in diesem Falle wird auch der Kessel sehr erhitzt, vielleicht bis zum Rothglühen, und eine Explosion steht nahe bevor. Dieser erste Einwurf ist also falsch. Ehe die Platte ihren Schmelzpunct erreicht, wird sie ein wenig weich; sie kann daher aus einander fallen unter

einem Drucke, der weit unter dem liegt, der ihr Schmelzen veranlaſst hätte. Anfänglich fand dieſs wirklich Statt, allein seitdem man die Platte mit einem Metallflor von engen Maschen überdeckt, ehe man sie an die Röhre befestiget, die sie schlieſsen soll, ist die Schwierigkeit verschwunden. Zwar bilden sich auch jetzt noch hie und da einige Blasen, wenn man sich dem Schmelzpuncte nähert, allein dieſs findet nur sehr nahe an diesem Grade Statt, und die Erfahrung hat gezeigt, daſs die Platte von unten nach oben geschleudert wird, und dem Dampfe eine freie Bahn öffnet.

Wenn die schmelzbare Platte einmal verschwunden ist, strömt der ganze Dampf aus der früher von ihr verschlossenen Öffnung heraus. Es kann lange hergehen, ehe man sie ersetzt, den Kessel von Neuem füllt und heitzt, und während dieser ganzen Zeit bleibt die Maschine unthätig stehen. Auf einem Dampfschiffe, besonders in der Nähe der Küste oder im Momente des Eintrittes in den Hafen, könnte der plötzliche Abgang der bewegenden Kraft traurige Folgen haben. Diese Schwierigkeit ist unläugbar und sehr bedeutend, darum werden in England durchaus die gewöhnlichen Sicherheitsklappen vorgezogen; diese lassen nie allen Dampf entweichen, denn, wie dessen Elasticität unter ihr Gewicht zurücksinkt, fallen sie wieder zu.

Die Anhänger der schmelzbaren Platten stellen unter den Vortheilen, die sie ihnen zuschreiben, in den ersten Rang, daſs man bei dergleichen Klappen ganz sicher vor allen Unvorsichtigkeiten der Arbeiter sey; allein sie haben Unrecht. Zwar *überladen* kann man dergleichen Klappen allerdings nicht, allein die Heitzer wissen gar wohl, was sie zu thun haben, wenn sie ein stärkeres Feuer als gewöhnlich anfachen wollen. Sie leiten auf die schmelzbare Platte einen dauernden Strom kal-

tes Wasser: man hat also auf diese Weise nichts gewonnen.

9. Dünne Bleche.

Eine Sicherheitsklappe, sowohl die von *Papin* als eine leicht schmelzbare Platte, ist doch, genau betrachtet, nichts anders als eine künstliche Schwächung eines Theiles der Kesselwand. Diese Schwächung hat man nun auch dadurch hervorbringen wollen, dafs man kleine, zu diesem Zwecke eigens im Kessel gemachte Öffnungen mit Metallblechen bedeckte, deren Dicke so berechnet war, dafs sie unter dem Druck von 1, 2, 3, ... 10 Atmosphären rissen, wenn man in seiner Arbeit diesen Druck nicht überschreiten wollte. Offenbar konnte der Sprung einer so kleinen und dünnen Platte nie einen bedeutenden Unfall verursachen.

Dieses Mittel, so schicklich es auch scheinen mag, wird selten angewendet, sey es, weil es nicht leicht ist, auf dem Erfahrungswege für jeden Diameter des Lochs die Dicke der Platte auszumitteln, die bei diesem oder bei jenem Drucke springen würde, oder weil man nicht dafür stehen kann, immer gleich starke Platten zu haben. Übrigens ist die Platte, wenn sie einmal an ihrem Platze ist, weniger den Angriffen der Arbeiter ausgesetzt, sie können sie höchstens schwächen, aber nie verstärken, was die Hauptsache ist. In dieser Rücksicht verdienen die dünnen Bleche vor den leicht schmelzenden Platten den Vorzug, allein unglücklicher Weise haben sie gleich denselben die Inconvenienz, wenn sie einmal gebrochen sind, allen Dunst ausströmen zu lassen.

10. Manometrische Klappen.

Die manometrische Röhre, von der ich weiter oben gesprochen, vertritt auch die Stelle einer Sicherheitsklappe, ja sie ist sogar in dieser Beziehung den gewöhn-

lichen Klappen und den schmelzbaren Platten vorzuziehen. Die gewöhnlichen Klappen geben keine Anzeichen, als im Augenblicke ihres Öffnens, die schmelzbaren Platten bloſs im Augenblicke ihres Schmelzens. Der Einheitzer ersieht auf ein Mal, daſs er den Grenzdruck erreicht habe, den er nicht überschreiten darf, aber nichts warnte ihn, daſs er sich demselben nähere. Das Manometer im Gegentheile gibt ihm in jedem Augenblicke das Maſs der Elasticität des Dampfes, es redet, wenn ich mich so ausdrücken darf, eben so vernehmlich unter schwachem als unter starkem Drucke.

Die gewöhnliche Klappe kann alle ihre Beweglichkeit verloren haben, ohne daſs man es weiſs, während im Gegentheil, wenn Unreinigkeiten zufällig die manometrische Röhre verstopfen sollten, die völlige Unbeweglichkeit der Quecksilbersäule es alsogleich anzeigt; denn die in einem so groſsen Gefäſse, wie ein Kessel ist, gewiſs eintretenden Ungleichheiten in der Dampfelasticität bringen im normalen Zustande nothwendig ein immerwährendes Schwanken des Quecksilbers hervor.

Die Quecksilbermanometer müssen also als die besten Sicherheitsklappen betrachtet werden, die man bis jetzt erfunden hat, wenn nur ihr Durchmesser hinlänglich groſs ist. So oft sie also ihre allzugroſse Länge nicht unanwendbar macht, sind sie das beste Präservativmittel gegen alle, *aber auch nur* gegen jene Gefahren, für die immer die bestgebaute Klappe oder schmelzbare Platte geschützt hätte. Der Leser wird den Grund dieser Beschränkung kennen lernen, wenn ich zeigen werde, daſs in gewissen Fällen das Öffnen der Klappe selbst die Veranlassung der Explosion sey.

11. Innere oder Luftklappen, ihr Zweck.

Wenn man das Feuer unter dem Kessel anzündet, so enthält der vom Wasser nicht angefüllte Raum des

letztern atmosphärische Luft. Diese Luft, mit dem Dampf gemischt, geht nach und nach in die vom Kessel gespeiste Maschine über, und zuletzt ist sie vollkommen ausgetrieben. Nehmen wir nun an, die Arbeit werde jetzt unterbrochen, und man lasse das Feuer ausgehen; mit der sich verbreitenden Erkaltung setzt sich der Dampf ab, und nach einer gewissen Zeit ist der Raum, den er einnahm, luftleer. Da erleidet nun der Kessel von aufsen nach innen den Druck der ganzen Atmosphäre, ohne dafs von innen nach aufsen ein Gegendruck entgegen wirkte. Wenn die Condensation des Dunstes allmählig vor sich geht, so scheint es, hat man keine Gefahr zu befürchten; hat doch der Kessel, wenn auch in entgegengesetzter Richtung, einen Probedruck von 4—5 Atmosphären ausgehalten. Allein wenn die Condensation plötzlich geschieht, kann der erwähnte Umstand gefährlich werden (z. B. wenn ein kalter Wasserstrom den Kessel durchfährt), denn plötzlich wird das Gegengewicht des atmosphärischen Druckes entfernt, und dessen augenblickliche Wirksamkeit kann ganz den Erfolg einer plötzlichen Erschütterung haben, wie die waren, von denen ich früher gesprochen.

Um nun Unfällen dieser Art vorzubeugen, hat man die *innern* oder *Luftklappen* erfunden. Diese Klappe kann sich nur von aufsen nach innen öffnen. Sie wird entweder durch eine im Kessel angebrachte Spiralfeder festgehalten, deren Kraft kaum ihr Gewicht übersteigt, oder sie ist horizontal an einem aufserhalb befindlichen Hebel so angehangen, dafs sie genau die *innern* Wände der Öffnung berührt, die sie schliefsen soll. Nach dieser Anordnung kann die Elasticität des Dampfes nie unter den Druck der Atmosphäre herabsinken, ohne dafs die Klappe der Luft freien Eintritt in den Kessel gewährt; man hat daher nicht zu fürchten, dafs in dem-

32 *

selben ein leerer Raum entstehen werde. Freilich wäre es schwer zu behaupten, daſs dieses Mittel jede Eindrückung der Wände unfehlbar verhüten werde, denn diese ist meistens Folge einer *plötzlichen* und beträchtlichen Verminderung der Dampfelasticität, und dieses Übel kann die Klappe bei ihrer stufenweise eintretenden Wirksamkeit zwar vermindern, aber nie ganz heben. Gegen derlei Unfälle hilft nur die genaueste Wachsamkeit auf die Feuerungsmittel, und daſs man verhindere, daſs nicht durch irgend einen Zufall, z. B. durch eine groſse Menge über den Kessel verbreiteten kalten Wassers, derselbe plötzlich erkalte.

Der Untergang der Kessel mit innerer Heitzung erklärte sich auch ganz leicht, wenn man annehmen könnte, daſs sich manchmal innerhalb des kleinern Cylinders plötzlich ein leerer Raum bilde; allein da dieser Cylinder keinen Dampf enthält, bloſs Herd und Rauchfang der Maschine ist, könnte man kaum begreifen, wie sich in ihm ein leerer Raum erzeugen kann, wenn nicht die begleitenden Umstände der Explosion zu Mold-Mines darüber Aufschluſs gäben.

Man erinnere sich, daſs im Momente des Ereignisses die Thür des Herdes offen, hingegen das Luftloch des Rauchfanges geschlossen war, daſs hierauf alsogleich ein Feuerstrahl aus dem Herde hervor ins Atelier drang, und dann unmittelbar die Explosion erfolgte. — Als man die Thür des Herdes geöffnet, war sicherlich der Verbrennungsprozeſs wenig thätig, und der Luftstrom, der durch den Rauchfang aufstieg, war chemisch wenig verändert. Als man hierauf das Luftloch schloſs, strömte zwar keine neue Luft zu, aber dagegen blieb die darin enthaltene auch darin eingeschlossen. Da aber die Kohle noch nicht ganz erloschen war, ging die Entwickelung des Gases immer fort, es mischte sich mit der im Rauch-

fange enthaltenen Luft, und bald war das Verhältnifs stark genug, das Gemenge brennbar zu machen; es entzündete sich also, machte sich in Gestalt eines Flammenstrahles auf dem einzigen Wege Platz, der ihm noch geblieben war, nämlich durch die Herdthüre; und während eines Augenblickes mufste der kleine Cylinder, wenn nicht luftleer, doch wenigstens mit sehr verdünntem Gase gefüllt seyn.

Diese Erklärung, die wir *J. Taylor* verdanken, gibt den wahrscheinlichen Grund der häufigen Zertrümmerungen der Kessel mit innerer Heitzung. Will man daher solche Apparate anwenden, so darf man das Luftloch ja nicht eher schliefsen, als bis die Kohle ganz erloschen ist. Geringfügige ökonomische Rücksichten können da nicht überwiegen, wo die Gefahr so augenscheinlich, und wie man nun leicht einsehen wird, durch keine Luftklappen oder dergleichen Hülfsmittel mehr abwendbar ist.

12. Erklärung der Explosionen, denen ein Öffnen der Sicherheitsklappe oder eine Verminderung der Dampfelasticität voranging, nach *Perkins*.

Es sind die (S. 482 u. f.) angegebenen sonderbaren Thatsachen, die hier, nach der von *Perkins* gegebenen Theorie, ihre ziemlich glückliche Erklärung finden.

Wenn bei einem gewöhnlichen Kessel die Flamme sich nicht längs der Wände über das Niveau des Wassers erhebt, so hat dieses und der Dampf gleiche Temperatur; sobald aber der Kessel wenig Wasser enthält und die Flamme hoch hinan steigt, kann es geschehen, dafs einige Theile rothglühend werden. Der mit diesen in Berührung stehende Dampf erlangt eine ungeheure Temperatur, ohne darum auch eine grofse Spannung zu

erhalten, entweder weil er nicht gesättigt ist, oder aus einem andern weiter unten anzuführenden Grunde.

Denken wir uns den Kessel in diesem Zustande, und nun werde die Sicherheitsklappe gänzlich geöffnet; ein schnelles Ausströmen des Dampfes ist die unmittelbare Folge. Das Wasser, vom Drucke befreit, der es belastete, spritzt in Schaum und Blasen durch den ganzen Kesselraum (es ist dasselbe Phänomen, das der Champagner darbietet, wenn man die Flasche öffnet), allein wie die Wassertropfen mit dem beinahe glühenden Gase in Berührung kommen, werden sie alsogleich in sehr elastischen Dampf verwandelt; die Klappe, obgleich ganz offen stehend, kann der ungeheuern sich plötzlich entwickelnden Dunstmasse nicht genug Raum gewähren, und der Kessel springt.

Es gibt drei Hypothesen in dieser Erklärung. Die *erste*, daſs die Wände des Kessels in der Höhe, wo sie nicht mehr mit Wasser benetzt sind, eine sehr hohe Temperatur erlangen, und dieselbe dem eingeschlossenen Dampfe mittheilen können, ohne daſs das Wasser, auf dem der Dampf ruht, viel von dieser Erhitzung verspürt. Die *zweite*, daſs das siedende Wasser, sobald man den Druck der sie belastenden ausdehnsamen Atmosphäre plötzlich aufhebt, oder auch nur bedeutend vermindert, in Tropfen von unten nach oben gespritzt werde. Die *dritte*, daſs das auf diese Weise unter eine übermäſsig erhitzte Dunstmasse verspritzte Wasser sich selbst *plötzlich* in Dunst verwandle.

Die *erste* Hypothese wird wohl Niemand bezweifeln. Wenn ein Metallgefäſs, das auf einem Haufen brennender Kohlen steht, nicht glühend wird, geschieht es nur darum, weil das in ihm eingeschlossene Wasser den Wänden die Wärme entzieht, die sie erhalten. Diesen Dienst kann der Dampf nicht in demselben Maſse leisten, daher

kann der Theil des Kessels über dem Niveau des Wassers wirklich glühend werden, seine Wärme der angrenzenden Dampfschichte mittheilen, welche ihrerseits in die Höhe steigt, und so die erlangte Wärme dem ganzen vom Wasser nicht erfüllten Raume, der sogenannten *Dampfkammer*, mittheilt. Hier einige Beispiele dieser Wirkungen: Hr. *Moyle* bemerkte einst bei einer Untersuchung seiner Maschinen zu Cornwallis, daſs eine derselben sich so ganz in der eben erwähnten Lage befand, daſs eine hölzerne Leiter, die mit dem Fuſse auf der *Decke* des Kessels ruhte, Feuer gefangen hatte. — Ein ähnliches Ereigniſs trat auf einem der Paquetboote zwischen Liverpool und Dublin ein; ein Tannenbalken, der zufällig auf den Deckel des Kessels geworfen wurde, entzündete sich. Den Unfall zu Pittsburg habe ich schon erzählt; da hatte der Ingenieur offenbar schon seit Langem bemerkt, daſs der eine Kessel rothglühend war. Ich setze noch eine directe Erfahrung *Perkins* über diesen Punct her.

Ein cylindrischer Kessel, 4 engl. Fuſs hoch, 1 Fuſs im Durchmesser, wurde vertical auf einen Ofen gestellt, seine Basis mit Feuer umgeben, das sich bis auf ein Drittheil seiner Höhe erhob, indeſs das Wasser nur ein Sechstheil derselben benetzte. Aus dieser Anordnung folgt, daſs $^2/_6$ des ganzen Cylinders die unmittelbare Einwirkung des Feuers erfuhren, $^1/_6$ über, $^1/_6$ unter dem Wasser. Die Sicherheitsklappe, ungefähr mit einer Atmosphäre belastet, war seitwärts angebracht, ungefähr in der halben Höhe. Das verdunstete Wasser, das diese Klappe entweichen lieſs, wurde in dem Maſse nachgefüllt, als es ausströmte. Ein Thermometer, das in das Wasser gesenkt war, und bis an den Boden des Gefäſses reichte, zeigte 104° *C.*, dieſs war auch die Temperatur der Dunstschichte an der Oberfläche des Wassers; al-

lein in der halben Höhe des Kessels gab das Thermometer 260° an, *und der Deckel war rothglühend.*

Ich gehe nun zum *zweiten* Puncte über. Es gibt Flüssigkeiten, die während ihres Siedens oft heftig aufschwellen, wie z. B. die Schwefelsäure und in schwächerem Grade die Milch. Wenn man mit Aufmerksamkeit heftig siedendes Wasser beobachtet, so bemerkt man auch von Zeit zu Zeit kleine Tropfen, die ziemlich hoch hinaufgeschleudert werden. Alles dieſs hängt offenbar von der Zähigkeit der Flüssigkeit und der Schwierigkeit ab, welche die Dunstblasen beim Durchbrechen der zu durchstreichenden Masse finden. Wenn die so eingeschlossenen Blasen zahlreich und bloſs durch einen auf der Oberfläche der Flüssigkeit lastenden Druck aufzusteigen verhindert sind, so begreift man leicht, daſs beim plötzlichen Aufhören dieses Druckes die Dunstentwickelung stürmisch wird, die Flüssigkeit, wie das mit Gasen geschwängerte Wasser, aufschäumt, und sich ganz in eine Art Schaum verwandelt, der halb aus Wasser, halb aus Dampf bestehend, mit gewaltiger Vergröſserung seines Volumens sich durch den ganzen Raum des Kessels verbreitet. Ein directer Versuch, an einem durchsichtigen Gefäſse angestellt, würde bald zeigen, bei welchen Flüssigkeiten alle diese Voraussetzungen genau zutreffen; bis dahin gestattet uns die Analogie, auch die zweite Hypothese *Perkins* für bewährt zu halten.

Was die *dritte* Hypothese betrifft, können wir darüber directe angestellte Versuche benützen. *Perkins* füllte einen der Cylinder, die er *Generatoren* nennt, mit Wasser, und erhitzte ihn bis auf 260° *C.*; diesem Cylinder zur Seite befand sich ein Recipient, in dem weder Wasser noch dichter Dampf war, mit einer Temperatur von ungefähr 650°. Diese beiden Gefäſse konnten durch eine Zwischenröhre mit einander in Verbindung gesetzt

werden, die eine hinlänglich beladene Klappe für gewöhnlich schlofs.

Diefs angenommen, mufste offenbar, wenn man mittelst einer Druckpumpe ein bestimmtes Volumen kaltes Wasser durch das eine Ende des Generators in denselben hineinbrachte, die Klappe am andern Ende sich öffnen, und ein gleiches Volumen warmes Wasser in den andern Recipienten überströmen lassen, das sich in demselben alsogleich in Dampf verwandelte; nun aber gab eine besondere Klappe, mit welcher der Recipient versehen war, ein sicheres Mittel zu erkennen, ob diese Dunstbildung *auf ein Mal* vor sich ging. *Perkins* behauptet, dafs diefs wirklich der Fall sey, dafs die Druckpumpe kaum zu wirken angefangen habe, als die Sicherheitsklappe des Recipienten schon Elasticitäten von 40 — 100 Atmosphären gab; 40 bei einem schwachen, 100 bei einem starken Drucke der Pumpe.

Der eben angeführte Versuch würde jeden Einwurf gegen die dritte Hypothese beseitigen, und ein treues Bild von dem geben, was in einem gewöhnlichen Kessel vorgeht, wenn er statt mit Wasser von 260°, mit Wasser von 100° — 120° angefüllt worden wäre. Indefs ist es aufser allem Zweifel, dafs 200°, die Temperatur des angewendeten Wassers, unmöglich einem Druck von 100 Atmosphären entsprechen, dafs daher ein Theil dieses Wassers sich augenblicklich in Dunst verwandelt haben müsse; und diefs zu wissen, thut uns eben Noth.

Bemerken wir hier nur, dafs aus dem besprochenen Versuche keineswegs hervorgehe, dafs es eben der Einflufs des verdünnten, aber bis zur Rothglühhitze gebrachten Dunstes sey, dem das Wasser seine plötzliche Verwandlung in äufserst elastischen Dampf verdankt. Dieser Theil der Behauptung *Perkins* widerspricht nach der Bemerkung *Dulong's* allem dem, was man über die

specifische Wärme des Wasserdunstes weiſs. Es scheint, der amerikanische Ingenieur habe Unrecht, wenn er den *directen* Einfluſs der glühenden Wände auf das uns beschäftigende Phänomen unbeachtet lieſs.

Versuchen wir nun, ob wir, die plötzliche Dunstbildung als Thatsache vorausgesetzt, eine genügende Erklärung der angeführten auſserordentlichen Ereignisse geben können. Was die Explosion des Kessels des Hrn. *Gensoul* betrifft, S. 483, scheint sie beinahe wie zur Bestätigung der Theorie *Perkins* eingetreten zu seyn. Man kann wirklich sagen, daſs im Moment der Öffnung des Hahnes das Wasser auf einmal von einem groſsen Theil des belastenden Druckes befreit wurde, bis zum Deckel hinauf anschwoll, und da es ein Gefäſs mit wahrscheinlich sehr erhitzten Wänden durchstreichen muſste, sich so plötzlich in Dunst verwandelte, daſs der Hahn keine hinreichende Öffnung mehr gewährte.

Dieselben Schlüsse lassen sich bei dem Versuche der Herren *Tabareau* und *Rey* anwenden, denn ihr Kessel war sehr klein, stand ganz ohne Hülle auf einem Kohlenhaufen, und konnte, wie ich mich überzeugt habe, von der Flamme auch in jenem Theile umhüllt werden, den kein Wasser erfüllte. Daſs wir, *Dulong* und ich, keine Vermehrung des Druckes bemerkten, rührte davon her, daſs unsere Dunstkammer ziemlich groſs, das Loch der Klappe sehr klein war, daher nur eine sehr unmerkliche und allmähliche Verminderung der Elasticität des vorhandenen Dunstes Statt finden konnte, und daſs ferner unser Kessel, mit Sorgfalt auf einem gemauerten Ofen befestiget, nur in dem mit Wasser gefüllten Theile der Flamme ausgesetzt war.

Auch die Verzögerung im Gange der Maschine, die man einige Zeit vor der Explosion sowohl zu Essone als zu Paris und in Amerika bemerkte, scheint mir eine

Folge aus *Perkins* Theorie. Denn so oft eine Explosion geschah, hatte man bemerkt, daſs wegen eines Fehlers in der speisenden Pumpe oder irgend einer Verstopfung in der Zuleitungsröhre, das Niveau des Wassers im Kessel bedeutend gefallen war; nun aber ist die in einer gegebenen Zeit erzeugte Dunstmenge im Allgemeinen der Gröſse der mit der Flüssigkeit in Berührung stehenden Metallfläche proportionirt; diese hat beim Sinken des Wassers abgenommen, und es wird nunmehr nicht genug Dunst für den Bedarf der Maschine erzeugt, deren Gang also träger werden muſs. Vielleicht denkt man, daſs das Übermaſs der Temperatur, das der Dunst durch die Berührung mit dem hoch erhitzten Deckel des Kessels erhält, die geringere Menge compensirt, allein eine einfache Betrachtung zeigt das Unrichtige dieser Behauptung. In einem begrenzten Gefäſse muſs der Dampf offenbar überall dieselbe Elasticität haben. Die unterste, das Wasser berührende Schichte, hat nun eine Spannung, die von der Temperatur des letztern abhängt, die Spannung der obern von den sie umgebenden rothglühenden Wänden erhitzten Schichten kann daher nie die der untern Schichte überschreiten. Folglich enthält im Ganzen der Kessel Dampf von geringerer Dichte, als die des gesättigten Dampfes wäre; dieſs ist die ganze Erklärung.

Nach der Meinung *Perkins* hat der Dampf im Momente vor der Explosion, d. i. im Momente des Öffnens der Klappe, die Grenze jener Spannung erreicht, unter der die Maschine arbeiten soll; allein dennoch geht der Kolben nur träge, denn da der Dampf viel heiſser als der Stiefel der Pumpe ist, verliert er durch die Erkaltung einen groſsen Theil seiner Elasticität.

Es wäre, ich gestehe es, eine leere Prahlerei, wenn man aus der eben vorgetragenen oder aus irgend einer

andern Erklärung die Gestalt der Linien, längs welcher der Kessel springen, die Zahl und Gröſse der Theile, in die er zerfallen wird, und die Richtung deduciren wollte, in welcher diese fortgeschleudert werden sollen; alles dieſs kann durch eine Unzahl von Umständen modificirt werden, die man alle kaum dann berücksichtigen könnte, wenn das Phänomen sich langsam vor unsern Augen entwickelte. Allein die Regelmäſsigkeit und Horizontalität der Linie, längs welcher der Kessel springt, und die so oft beobachtet worden ist, leitet uns auf die Vermuthung, ob sie nicht etwa die Höhe des Wasserstandes an den Wänden des Kessels bezeichne, und nun ist es sonderbar, warum denn eben diese Linie, trotz der Ungleichheiten der Dicke, die man längs derselben oft bemerkt, eben die des schwächsten Widerstandes sey? Vielleicht dürfte diese Eigenheit sich so erklären lassen:

Im letzten Momente vor der Explosion wird die Spannung des Dampfes plötzlich und beträchtlich vermindert, daher muſs in selbem Momente der Kessel von auſsen nach innen eingedrückt werden; allein da dieser Druck plötzlich eintritt, so wird ihn der mit Wasser gefüllte Theil kaum verspüren, wegen der Trägheit der Flüssigkeit, die nicht in einem einzigen Augenblicke überwunden werden kann. — Dieser Druck von auſsen nach innen geht also um die Grenzlinie des Niveau der Flüssigkeit, wie um eine Charniere vor sich; allein wir haben gesehen, wie *im Momente* der Explosion eine plötzliche Entwickelung eines sehr ausdehnsamen Dampfes erfolgt, daher nach der eben erlittenen Zusammenziehung nun der Kessel auf einmal wieder ausgedehnt wird. Nimmt man nun auch an, daſs er diese zweite Wirkung gleichmäſsig in allen seinen Theilen erleide, so wird doch diese rückgängige Bewegung schwächer unterhalb des Niveau der Flüssigkeit seyn, schon darum, weil die

erste Bewegung dort beinahe unmerkbar gewesen; die Grenzlinie des Niveau wird also auch hier wieder die Grenze bezeichnen, wo zwei ungleich starke Bewegungen des Metalls zusammentreffen. Nun braucht man nur ein Mal gesehen zu haben, mit welcher Leichtigkeit die Arbeiter Bleche aus dem zähesten Materiale zerbrechen, wenn sie sie plötzlich zwei entgegengesetzten Biegungen um dieselbe Linie ausgesetzt haben, um begreifen zn können, warum diese Grenzlinie, welche als Charniere zweier so heftiger und augenblicklicher entgegengesetzten Bewegungen diente, auch die Bruchlinie seyn werde, wenn sie auch nicht die des geringsten Widerstandes ist. Dieselbe Linie bezeichnet ja übrigens auch die Grenze der Schichten, in denen das Metall sehr verschieden erwärmt, und daher von sehr verschiedener Haltbarkeit ist.

Ich habe im Vorhergehenden, S. 480, mich bei der gleichzeitigen Explosion mehrerer mit einander zur Speisung derselben Maschine dienender Kessel aufgehalten, als einer wichtigen Thatsache, die wohl eine Untersuchung ihrer wahrscheinlichen Veranlassung verdient. Allein sollte es so schwer seyn, diese anzugeben, wenn man mit *Perkins* annimmt, dafs die gewöhnliche Veranlassung einer Explosion ein starkes Sinken des Wasserniveau und eine aufserordentliche Erhitzung der Kesselwände ist? Müssen nicht bei den verschiedenen, mit einander verbundenen Kesseln diese Bedingungen zu gleicher Zeit eintreffen? denn einerseits speist sie dieselbe Pumpe, und andererseits werden die Arbeiter, sobald sie die Verzögerung des Ganges der Maschine bemerken, das Feuer wohl in *jedem* Ofen heftig anfachen. — Nehmen wir nun an, einer dieser Kessel springe zu Folge der Öffnung seiner Klappe. Die Röhre, welche der Dampf dieses Kessels durchstreichen mufste, um in

den Pumpenstiefel zu dringen, mündet von jetzt an in die Atmosphäre; da aber jeder Kessel eine solche Röhre hat, und alle in einen und denselben Metallcylinder zusammenlaufen, so stehen mittelst dieses Cylinders auch der zweite, dritte, . . . kurz alle übrigen Kessel in freier Communication mit der Luft, der Dampf, der sie erfüllte, strömt mit reifsender Geschwindigkeit auf diesem breiten Wege aus, und in einer unmerklichen Zeit kommen auch in ihnen alle die Veranlassungen einer Explosion zusammen, und sie springen, ohne dafs man gar ein gleichzeitiges Öffnen aller Klappen anzunehmen braucht.

Ich habe S. 487 von einem Kessel gesprochen, der in der Luft explodirte; allem Anscheine nach hatte sich der zu Lochrin auch 12 — 15 Fufs über das Mauerwerk, auf dem er ruhte, erhoben, ehe er barst; aber auch dieser Umstand — obgleich er auch auf andere Weise und nach ganz andern Theorien erklärt werden kann, und daher an und für sich nicht entscheidend ist — findet ohne Mühe seine Erklärung in *Perkins* Theorie.

Man täuscht sich sehr, wenn man glaubt, ein aus gehämmerten Platten zusammengefügter Kessel werde sicher an seinem Platze bleiben, was für eine Öffnung sich auch an ihm bilde. Dieser Irrthum, in den z. B. viele von denen gefallen sind, die sich unlängst mit tragbaren Gasapparaten beschäftiget haben, kann schwere Unfälle zur Folge haben. Wahr ist's, ein vollkommen geschlossenes Gefäfs bleibt unbeweglich, wie grofs auch die Elasticität des eingeschlossenen Gases ist, allein dann ist der Druck auf eine Wand durch den Gegendruck auf die entgegengesetzte ins Gleichgewicht gesetzt; nun aber begreift die ganze Welt, dafs, wenn die eine Wand zerstört wird, auch die auf dieselbe wirkende Kraft aufgehoben ist, die andere entgegengesetzte

Kraft allein übrig bleibt, und den Kessel in ihrer Richtung fortbewegt; diese entgegengesetzte, nun nicht mehr im Gleichgewichte befindliche Kraft, heifst die *rückwirkende.*

Nach diesen Vorbegriffen reichen einige Worte hin, um zu zeigen, wie nach *Perkins* eine Explosion in der Luft Statt finden kann: Der Explosion geht, nach diesem Mechaniker, stets eine starke Dampfentwickelung voran. Geht diese Entwickelung durch die Klappe vor sich, die gewöhnlich am Deckel des Gefäfses angebracht ist, so wirkt die reagirende Kraft von oben nach unten, und drückt den Kessel an seine Unterlage; allein wenn der Dampf von oben nach unten durch irgend eine Spalte an den untern Wänden entweicht, so kann der Kessel in der entgegengesetzten Richtung emporgeschleudert werden, der Dampf braucht nur eine hinreichende Elasticität zu besitzen. Hiezu kömmt, dafs die Schwankungen des eingeschlossenen Wassers, natürliche Folgen dieser ungeheuren Bewegung, auch unabhängig von den früher angegebenen Ursachen, jene plötzliche Dunstentwickelung veranlassen können. die dann die Explosion herbeiführt.

Perkins Theorie erklärt also, wie wir sehen, genügend alle Explosionen, deren Hergang ich nur in Erfahrung bringen konnte, und denen eine Verminderung der Dampfelasticität vorausging; sie bedarf keiner Hypothese, die der Natur und dem Zustande unserer Kenntnisse widerspräche, und ich glaube, dafs sie volles Vertrauen, oder wenigstens das verdiene, dafs man die Vorsichtsmafsregeln nehme, die sie anräth, und die überdiefs äufserst einfach sind. Man verhindere durch alle mögliche Mittel, wie z. B. durch leicht schmelzende Platten, dafs kein Theil des Kessels sich allzu stark erhitze. Man wende die gröfste Sorgfalt auf die Wasser zuführenden Pumpen und Röhren, wie auf alle Apparate, die

auf den Wasserstand im Kessel Einfluſs haben. Wenn trotz aller Sorgfalt des Ingenieurs die Wände an einigen Stellen zu glühen anfangen, vermeide man ja jede plötzliche Öffnung der Klappen oder jedes andere Manöver, das dem schon erzeugten Dampfe einen plötzlichen Austritt in die Atmosphäre erlaubt. Man lösche endlich das Feuer so schnell als möglich aus.

13. Vergleichung der Erklärung *Perkins* mit den von andern Ingenieuren gegebenen.

Trotz ihrer Vorzüglichkeit kann man die Erklärung *Perkins* nicht für so evident halten, daſs man gar keinen Zweifel erheben oder die Frage für abgeschlossen halten sollte; ich will vielmehr hier noch einige Bemerkungen über denselben Gegenstand anschlieſsen, die ich theils aus gedruckten Werken, theils aus Manuscripten gezogen, die ich zu Rathe ziehen durfte; auch will ich noch mehrere besondere Veranlassungen von Explosionen anführen von denen der amerikanische Mechaniker nicht spricht, und so die Bahn vollenden, die ich mir gesetzt habe.

Die Ansicht *Marestier's*, eines unserer geschicktesten Schiffbaumeister, über die (12.) erwähnte Art Explosionen stimmt wohl im Ganzen mit *Perkins* Theorie überein, allein in einem Puncte weichen sie wesentlich von einander ab. — Auch *Marestier* gibt zu, daſs der Mangel an Wasser, die hohe Temperatur des unbenetzten und vom Feuer umspülten Theiles der Wände, das beim Öffnen der Klappe oder einer andern zufälligen Entweichung einer Dampfmenge eintretende plötzliche Steigen des Wassers Ursachen der Explosionen seyen; er nimmt aber ferner an, daſs das in die Höhe gehobene Wasser in Berührung mit den glühenden Kesselwänden trete, und dadurch sich plötzlich und in sol-

cher Menge in Dunst verwandle, daſs die Sicherheitsklappe für eine so rasche Entwickelung unzureichend wird. In den Kesseln der Dampfschiffe sind die von den Wogen verursachten, starken Schwankungen eine neue Veranlassung, das Wasser über die glühenden Wände zu verbreiten. Und hierin eben zeigt sich die Verschiedenheit der Meinungen beider Mechaniker, indem *Perkins*, wie wir sahen, die Vertheilung des Wassers unter den verdünnten, aber sehr stark erhitzten Dampf, *Marestier* aber die directe Einwirkung der glühenden Wände für die Entstehungsursache einer so ungeheuern Menge Dampfes hält. — Für den ersten Anblick scheint diese letzte Meinung die allein annehmbare; allein, so sonderbar dieſs auch klingen mag, ein selbst weiſsglühendes Metall ist wenig geeignet, Dunst zu erzeugen. Und in der That, wenn man einen Wassertropfen in ein weiſsglühendes Gefäſs bringt, braucht es lange Zeit zur Verdunstung, während in demselben mittelmäſsig warmen Gefäſse er alsogleich verschwindet. Bei einem Versuche *Klaproth's*, den einzigen, den ich anführe, brauchte ein Wassertropfen, der auf einen weiſsglühenden eisernen Löffel gespritzt wurde, 40″ zur Verdunstung; wenn man nach Verlauf dieser Zeit einen zweiten Tropfen darauf fallen lieſs, verdunstete er in 20″; der Tropfen, den man nach Verdunstung des zweiten auf den Löffel goſs, verschwand in 6″, ein vierter in 4″, ein fünfter in 5″, der sechste endlich in einem Nu.

Aber trotz dieser merkwürdigen Beobachtungen scheint dennoch (ich habe es schon S. 505 gesagt) die directe Einwirkung der glühenden Kesselwände die Hauptrolle bei der die Explosion bewirkenden Dunstentwickelung zu spielen; allein, um dieſs darzuthun, müſste *Marestier* nachweisen, warum das Wasser im Kessel sich

ganz anders verhalte als die kleinen Tropfen im Versuche *Klaproth's*. Hätte man z. B. gefunden, daſs ein mit Gewalt an die glühende Wand geschleuderter Wassertropfen alsogleich verdunste, so verschwänden alle Zweifel von selbst, und die Explosion des glühenden Kessels zu Pittsburg wäre keine Anomalie mehr, für die man besondere Ursachen suchen müſste. Übrigens sind die Resultate aus den Erklärungen beider Ingenieure dieselben, und aus beiden gehen dieselben S. 511 schon angegebenen Vorsichtsmaſsregeln hervor.

Gensoul, dem die Lyoner Industrie so viel verdankt, erklärt die traurigen Folgen, die eine plötzliche Öffnung der Klappe manchmal mit sich führt, ganz anders als *Perkins* und *Marestier*. Folgendes ist der Hauptsache nach seine Ansicht:

Wenn ein Metallgefäſs eine stark zusammengedrückte Flüssigkeit enthält, so reicht ein schwacher scharfer *(coup sec)* Schlag an seine Wände hin, es zu sprengen, während eine selbst groſse Vermehrung des Druckes keinen Sprung hervorgebracht hätte, wenn sie allmählich und nicht stoſsweise vor sich gegangen wäre. Diese Thatsache ist bekannt, und *Gensoul* glaubt sie auch bei Kesseln anwenden zu können. Wenn die Wände dieser Gefäſse vom Dampf stark von innen nach auſsen gedrückt sind, kann sie schon der geringste Stoſs brechen, so, als wenn sie mit einer stark zusammengedrückten Flüssigkeit angefüllt wären; nun aber kann man einem Stoſse die heftige zurückprallende Bewegung vergleichen, die dem Kessel in jenem Theile seiner Wand mitgetheilt wird, die der Stelle, wo der Dampf frei ausströmen kann, diametral entgegengesetzt ist. — Diese sinnreiche Erklärung erregt manchen Zweifel. Zuerst scheint es nicht ausgemacht, daſs bei gleichem innern Druck ein Stoſs gleiche Wirkung auf zwei Gefäſse übet, von de-

nen das eine mit Wasser, das andere mit Dampf gefüllt ist, denn die Unzusammendrückbarkeit der tropfbaren Flüssigkeiten mag wohl hiebei von großem Einfluſs seyn. Ferner nimmt *Gensoul* an, daſs der Dampf vor der Explosion eine groſse Elasticität besitze, während wir mehrere Fälle angeführt haben, in denen gerade das Gegentheil Statt gefunden hat, so daſs in dieser Beziehung *Gensoul's* Erklärung wenigstens unvollständig ist. — Man muſs also gestehen, daſs auch die Reaction des Dampfes keine kleine Rolle bei derlei Explosionen spiele, wie ich auch S. 511 Unfälle hergezählt habe, welche diese Reaction veranlassen kann.

14. Andere Veranlassungen von Explosionen.

Viele, ganz erstaunt über die Gewalt und Plötzlichkeit der Wirkungen, die eine Explosion eines Kessels oft nach sich zieht, glaubten, daſs unmöglich der Dampf allein sie hervorbringen könne, und haben explodirbare Gase zu Hülfe genommen. Wenn man in den Laboratorien der Chemie, sagten sie, Wasserstoff erzeugt, indem man Wasserdampf durch eine glühende Eisenröhre streichen läſst, warum soll sich nicht dieses Gas auch im Innern des Kessels erzeugen, wo doch auch der Wasserdampf mit glühendem Metall in Berührung steht? Ich gebe es zu, es werde Gas erzeugt, mit dem Dampf gemischt gehe es in den Pumpenstiefel über, und da es keiner Condensation fähig ist, wird man es nur mit grossem Kraftaufwande fortschaffen können, und hiedurch werden die Wirkungen der Maschine bedeutend geschwächt seyn. Ich räume sogar ein, daſs dieſs die Ursache des Verlustes an Geschwindigkeit sey, den man vor dem Eintritte der Art Explosionen, mit denen wir uns beschäftigen, so häufig bemerkt; allein diese Explosion, wie geschieht sie denn? Wasserstoff für sich

allein, oder mit Dunst gemischt, kann doch nicht detoniren. Ein Gemenge von Wasserstoff und Sauerstoff in schicklichen Verhältnissen bilden wohl ein Knallgas, allein wie sich das Zusammentreffen beider Gase im Kessel erklären? — Woher soll denn der Sauerstoff kommen? Etwa aus der im speisenden Wasser enthaltenen Luft? allein dieses Wasser ist *warm*, und enthält also nur eine geringe Menge Luft; ferner geht diese, so wie sie sich entwickelt, mit dem bewegenden Dampf in den Pumpenstiefel über. Endlich wird eher das Oxygen der Luft sich mit den glühenden Wänden verbinden, als das erst aus dem Wasserdampfe durch Zersetzung sich entwickelnde, so dafs im Falle der Entstehung eines Gasgemenges es aus Wasser- und Stickstoff, nicht aber aus Wasser- und Sauerstoff bestehen würde. Und wäre selbst diese Schwierigkeit gelöst, so wäre man doch um keinen Schritt weiter. Denn blofs die Hellrothglühhitze oder ein electrischer Funke vermögen die Vereinigung der beiden das Wasser constituirenden Elemente zu bewirken, allein die Kessel sind gesprungen, ohne die Temperatur, die zur Hervorbringung der Detonation nöthig scheint, erreicht zu haben. Und woher einen electrischen Funken nehmen? Ich weifs wohl, dafs man in Amerika behauptet hat, die Explosion des Kessels des Dampfschiffes l'Entreprise von Javannah sey durch einen electrischen Schlag veranlafst worden, dem der aufsteigende Rauchstrom zum Leiter diente; allein angenommen, die Thatsache sey wahr, so berechtiget uns nichts anzunehmen, der Funke habe im Kessel ein entzündbares Gasgemenge angetroffen und entzündet, da er doch hier eben so gut wie sonst überall wirken konnte durch Zertrümmerung aller Körper, die er auf seinem Wege fand. Endlich räume ich sogar den Anhängern des eben besprochenen Systems ein, dafs ein electrischer Funke Ausnahms- und sicherlich wenigstens möglicher Weise Ursache einer Explosion seyn könne, allein ich kann kaum glauben, dafs man die Electricität ernstlich in allen oder auch nur in dem hundertsten Theile der eingetretenen Explosionen eine Rolle spielen lassen wolle.

Manchen Ingenieuren mochte es gar zu schwierig vorkommen, beide Bestandtheile des Gemenges, das sie

detoniren lassen wollten, in dem Kessel zu vereinigen, sie nahmen daher nur an, daſs sich Wasserstoff in letzterem bilde, und daſs dieses Gas nach Sprengung der Wände sich mit der Luft der Heitzkammer menge und detonire, so daſs diese Detonation zwar nicht die erste Ursache des Sprunges der Kessel, aber doch eine die Wirkungen bei weitem steigernde wäre. Diese Explosion im Herde wäre es, die den ganzen Kessel oder seine und des Ofens Trümmer so weit umherschleudere. Über derlei Gedanken habe ich nur zu sagen, daſs ich bis jetzt keine einzige Explosion kenne, bei der man mit Bestimmtheit behaupten könne, daſs im Kessel erzeugtes Wasserstoffgas dazu beigetragen habe.

Prüfen wir nun, ob nicht, wie mehrere Ingenieure der Meinung sind, die detonirenden Elemente in der Heitzkammer von selbst sich erzeugen und traurige Wirkungen hervorbringen könnten. Nach diesen Ingenieuren kömmt Kohlenwasserstoffgas von der Steinkohle, und reines Wasserstoffgas, wenn man es noch brauchen sollte, aus dem Wasser, das durch die unvollkommen vereinigten Platten des Kessels durchsintert und auf die Kohle fällt. Was den Sauerstoff betrifft, ohne den keine Explosion zu Stande kömmt, so nehmen sie ihn von dem ziemlich bedeutenden Theile des den Aschenherd durchstreichenden und dann aufsteigenden Luftstromes, der unzersetzt geblieben ist.

Wenn man je diese leuchtenden Flammensäulen gesehen hat, die von Zeit zu Zeit an der Spitze der höchsten Küchenrauchfänge erscheinen, so kann man nicht zweifeln, daſs die Gase, die der Luftzug *(le tirage)* mit fortführt, wohl manchmal explodirende Gemenge bilden können. Nun darf man nur annehmen, daſs ein solches Gemenge sich in irgend einem Winkel der Heitzkammer gebildet habe, um alles von seiner Entzündung zu fürchten zu haben, und ist die Detonation nur ein wenig stark, so scheint es wirklich, daſs die Wände wohl schwerlich widerstehen, ja vielmehr in Trümmer gehen werden.

Die *Möglichkeit* der Bildung solcher explodirbaren Gemenge hätte ich nun wohl nachgewiesen, allein ich muſs gestehen, daſs man nur gewisse Unfälle dieser Ursache zuschreiben kann. Ich spreche hier von den Ex-

plosionen an Dampfkesseln, die oben *ganz offen* waren. So habe ich von *Gay-Lussac*, daſs ein Ofen der Salpetersiederei im Arsenal zu Paris neulich durch eine solche Explosion ganz zerstört wurde, der Kessel jedoch blieb unbeschädigt.

Um dergleichen Unfälle zu verhüten, muſs man so viel möglich alle nach oben oder unten gebogenen Knie in den zur Ableitung des Rauches bestimmten Röhren vermeiden, denn vornehmlich diese Knie sind es, wo sich dergleichen detonirende Gemenge aufhalten. Das Luftloch des Rauchfanges darf nie hermetisch geschlossen seyn (siehe S. 500). Und um endlich zu vermeiden, daſs sich nicht das Kohlengas entwickle, ohne zu verbrennen, muſs man zwischen den Stangen des Rostes stets freie Zwischenräume erhalten. Ist die Kohle harzig und klebrig, so kleben die verschiedenen Stücke an einander fest, und bilden eine feste Kruste, die, wenn sie nur ein wenig dick ist, für die Flamme beinahe undurchdringlich ist. Die Heitzkammer wird dann ein wahrer Destillirapparat, gibt viel Kohlenwasserstoffgas und wenig Wärme. Den Rost daher nur mit einer dünnen Kohlenschichte zu beladen, ist nicht nur ökonomisch, sondern auch eine wichtige Vorsichtsmaſsregel. Die Heitzer, die aus Faulheit den Ofen mit Brennmateriale vollstopfen, schaden dem Gange der Maschine, und setzen diese, sich selbst, und das Leben ihrer Mitarbeiter den gröſsten Gefahren aus.

Ich will nun zuletzt noch eine Explosionsursache angeben, die nicht unwichtig ist: Selten bedient man sich reinen Wassers zur Speisung der Kessel. Meistens enthält dieses Wasser Salze, die sich beim Sieden absetzen, und endlich an den innern Wänden des Kessels eine steinige Kruste bilden, die von Tag zu Tag dicker wird. Diese Schichten wegen ihres geringen Leitvermögens führen die den Wänden mitgetheilte Wärme dem Wasser nur langsam zu, daher erhitzen sich die Wände immer mehr und mehr, da sie in jedem Momente mehr Wärme empfangen, als die Steinkruste abzuleiten vermag, sie werden glühend, und da heiſse Metalle viel weniger Festigkeit haben, steht eine Explosion nahe bevor. Wie leicht ist es nun möglich, daſs das beinahe noch kalte Wasser durch irgend eine Spalte der Stein-

kruste sich über die so heiſsen Wände verbreite. Unter diesen Umständen spränge ein gegossener Kessel sogleich, und was die aus gehämmerten Platten bestehenden Kessel betrifft, so würden sie, wenn sie auch nicht unterlägen, doch die heftigsten Erschütterungen erleiden. Hiezu kömmt noch, daſs die glühenden Metalltheile rosten und sich schnell abnutzen. Als Beispiel könnte ich einen Kessel anführen, der zur Heitzung eines der gröſsten Gebäude von Paris dient, und der dort ein Loch bekam, wo ein Arbeiter aus Versehen inwendig einen Fetzen liegen lieſs.

Man sieht, von welchem Belange es ist, den Kessel gut zu reinigen. Bei den Dampfschiffen, die Meerwasser anwenden, muſs der Salzniederschlag alle 24 Stunden weggeschafft werden. Ist das speisende Wasser rein, so kann es auch länger anstehen; es läſst sich hierüber Nichts numerisch bestimmen, der Ingenieur wird schon sehen, wie viel Salz und mit welcher Schnelligkeit das von ihm gebrauchte Wasser absetzet. Seitdem man weiſs, daſs Erdäpfelabfall *(la fécule de pomme de terre)* und Malz die Bildung der Salzablagerungen verhindern, hat man vorgeschlagen, von Zeit zu Zeit eine gewisse Menge dieser Stoffe in den Kessel zu werfen; ich weiſs nicht, ob dieser Gebrauch schon sehr verbreitet ist.

Ehe ich diesen Aufsatz endige, muſs ich mich über zwei Dinge rechtfertigen. Einmal, warum ich nicht zwischen Kesseln von hohem und niederem Druck unterschieden habe. Allein ich glaube, eine solche Unterscheidung ist überflüssig; im Momente der Explosion steht jeder Kessel unter hohem Drucke. Auch ist es gar nicht ausgemacht, daſs die Kessel von hohem Druck häufiger springen als die andern, vielmehr ist das Gegentheil von vielen Mechanikern, wie unter andern von *Perkins* und *Oliver Evans*, behauptet worden.

Der andere Vorwurf, den man mir machen könnte, ist, daſs mein Aufsatz viele Personen vom Gebrauche der Dampfmaschinen abschrecken werde. Wahrlich, wenn dieſs der Erfolg meiner Abhandlung seyn sollte, hätte ich sie lieber selbst unterdrückt; allein ich kann diese Besorgniſs nicht theilen, denn wenn man das Vorausgegangene mit Aufmerksamkeit liest, so wird man, ich darf es wohl gestehen, gegen jede mögliche Veran-

lassung einer Explosion, ohne Ausnahme, ein einfaches und allgemein zugängliches Mittel angegeben finden. Wer wird einem Kinde ein Feuergewehr anvertrauen, und ist es nicht eben so, wo nicht noch gefährlicher, die Leitung der Dampfmaschine einem ungeschickten, unerfahrenen, einsichtlosen Arbeiter zu überlassen? Man täuscht sich, wenn man meint, weil diese Maschinen für gewöhnlich von sich selbst gingen, bedürften sie auch keiner Obhut; diesen Irrthum hat schon *Watt* mit aller Kraft bekämpft, und wenn meine Arbeit zu seiner Verdrängung beitragen kann, so ist meine Mühe reichlich belohnt; denn dieſs war der einzige Zweck, den ich vor Augen hatte.

Erklärung.

In *Kastner's* Archiv für die gesammte Naturlehre, Bd. 18, kommt ein Aufsatz über den Klauſsner Sauerbrunnen in Steyermark vor, worin (S. 314) die Bemerkung steht, daſs nach Professor *Anker* die ganze Gleichenberger Gegend *reich an Spuren ehemaliger Feuerausbrüche* sey. Wir sind vom Hrn. Prof. *Anker* ersucht worden, zu erklären: daſs seines Wissens daselbst von Feuerausbrüchen keine Spur wahrzunehmen sey, und daſs er nie über derlei Ausbrüche in der Gleichenberger Gegend sich geäuſsert habe, wiewohl daselbst nach seiner Ansicht vulkanische Gebilde vorkommen. (Die Red.)

Verbesserungen.

Seite	317	Zeile	4	statt:	DCD'	soll es heiſsen:	DCD''
»	320	»	1	»	A''	» » »	A
»	—	»	3	»	$B''D''A$	» » »	$B''D''O$
»	322	»	15	»	Fig. 23	ist zu lesen:	Fig. 23, die Ansicht von Vorne,
»	331	»	12	»	$K =$	» » »	$k =$
»	333	»	26	»	R und p	» » »	$\mathfrak{K}$ und p
»	334	»	2	»	$\Pi = \mathfrak{K} r \sin. \zeta + \frac{\delta n}{2\mu} \sqrt{(\mathfrak{K} \cos. \vartheta + m)}$		

ist zu lesen: $\Pi = \frac{\mathfrak{K} r \sin. \zeta}{\mathfrak{R}} + \frac{\delta n}{2 \mu \mathfrak{R}} \sqrt{(R \cos. \vartheta + m)^2}$

Seite 484 Zeile 3 statt: *Gersont* soll es heiſsen: *Gensoul*

Fig. 26.

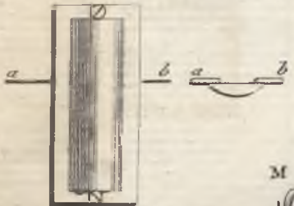


Fig. 27.

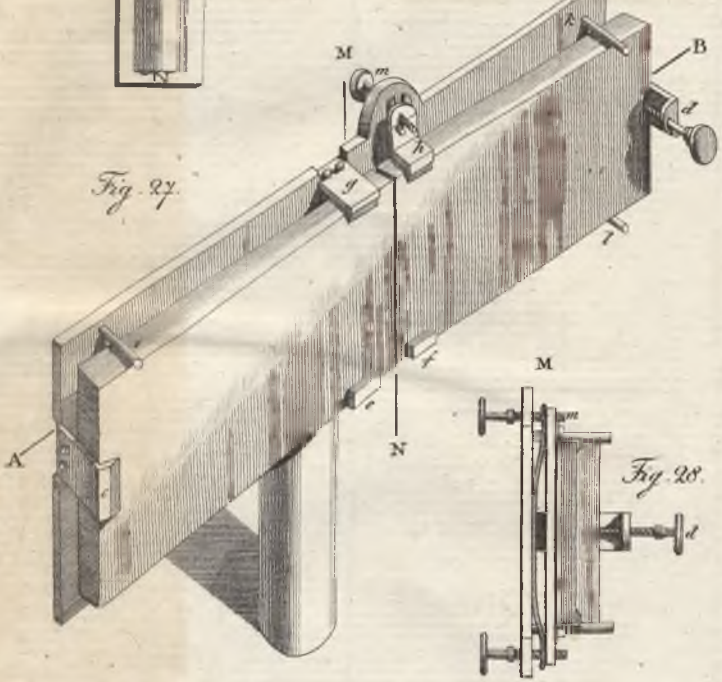


Fig. 28.

Fig. 29.

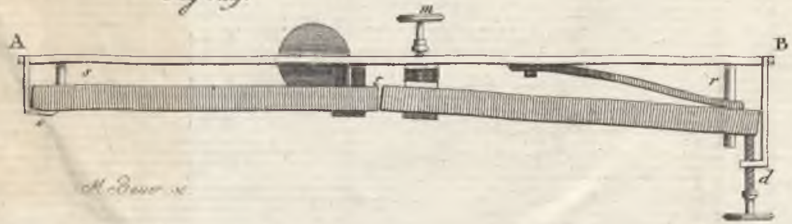


Fig. 30.



Fig. 31.



Fig. 32.



Fig. 33.



Fig. 34.



Fig. 35.



Fig. 36.



Fig. 37.



Fig. 38.



Fig. 39.



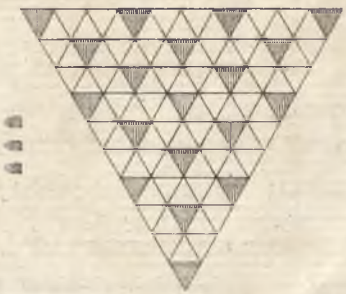
Fig. 40.



Fig. 41.



Fig. 42.



M. Bauer sc.